LOI DE POISSON

I. Raisonnement

Exemple 1 :
Quelle est la probabilité d'observer 3 cas d'une maladie rare trichinellose en une année dans une ville de 10 millions d'habitants ?
(Fréquence annuelle : 10 cas pour 66 millions)

k = 3 n =10 000 000 et p = 0,00000015

Impossible à calculer par la loi binomiale

Exemple 2 :
Sachant que dans un service d'urgences, on accueille en moyenne 5 entorses par week-end
Quelle est la probabilité d'observer 3 entorses ou cours du prochain week-end ?

Impossible à calculer par la loi binomiale

Les situations dans lesquelles il n'est pas possible d'utiliser la loi binomiale sont donc :

1. **Caractéristique de la variable étudiée est très rare avec :**
    - La proportion p très faible,
    - La taille n de l'échantillon très élevée.
2. **Caractéristique de type accidentel.**
    - La caractéristique étudiée n'est pas connue sous forme d'une proportion P
    - Elle est représentée par un nombre d'évènements attendus en moyenne pendant une période déterminée

II. Loi de Poisson

C'est une loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète

C'est la probabilité d'observer k événements pendant une période donnée connaissant le nombre moyen d'événements attendus habituellement pendant cette période.

- k : le nombre d'événements observés dans l'échantillon
- µ : nombre moyen d'évènements observés
- e = 2 ,718

Formule de la loi de Poisson :

$$\Pr(k) = \frac{e^{-\mu}\,\mu^{k}}{k!}$$

Autre écriture de la formule

$$Pr\ (X = x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} \qquad x \in \{0 \ldots . \infty\} = \mathbb{N}$$

où selon la formule précédente : $\lambda = \mu$, $k = x$

C'est une loi de probabilité d'une variable discontinue qui ne dépend que d'un seul paramètre qui est la moyenne μ ou (λ).
Contrairement à la loi binomiale qui dépendait de 2 paramètres n, p.

Exemple : Quelle est probabilité d'observer 3 entorses au cours d'un week-end de garde, sachant qu'en moyenne 5 cas d'entorses sont admis par week-end ?

On a : k = 3 et μ =5

Probabilité d'observer 3 entorses : Pr (3 entorses) = $\frac{e^{-5}\,5^3}{3!}$

Moyenne et variance de la loi de Poisson

On démontre que la moyenne et la variance est égale à μ

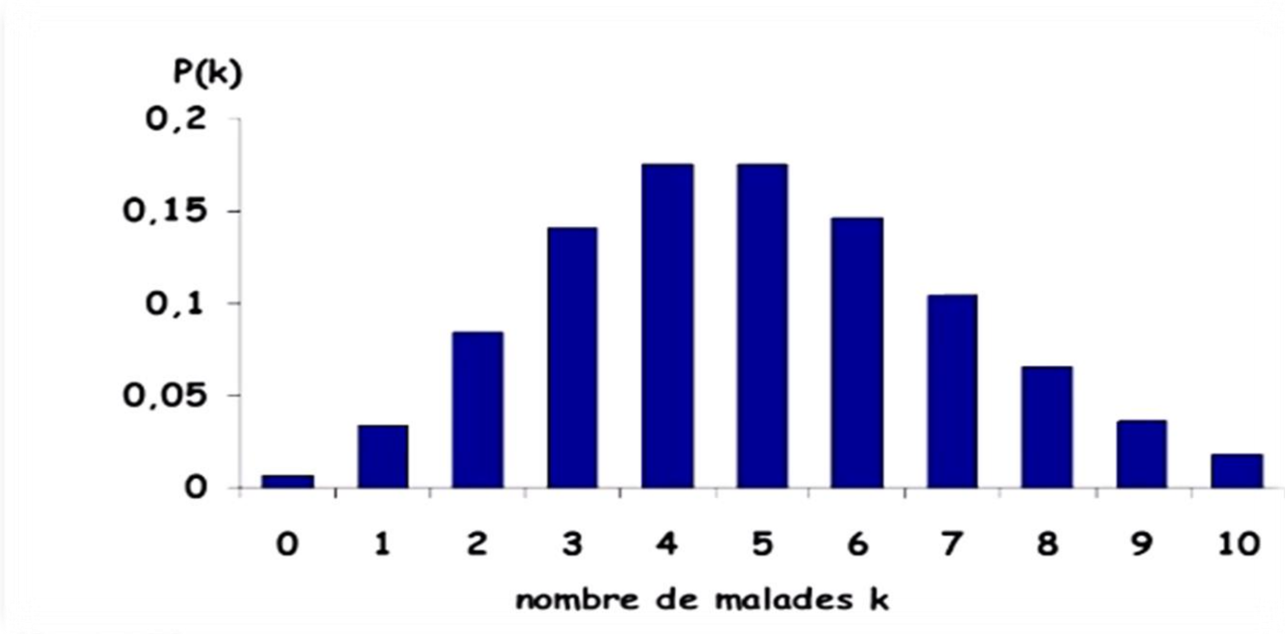
E(X) = V(X)= μ - $\sigma = \sqrt{\mu}$

III. Distribution de la loi de poisson

Si on voit moyenne 5 entorses par week-end

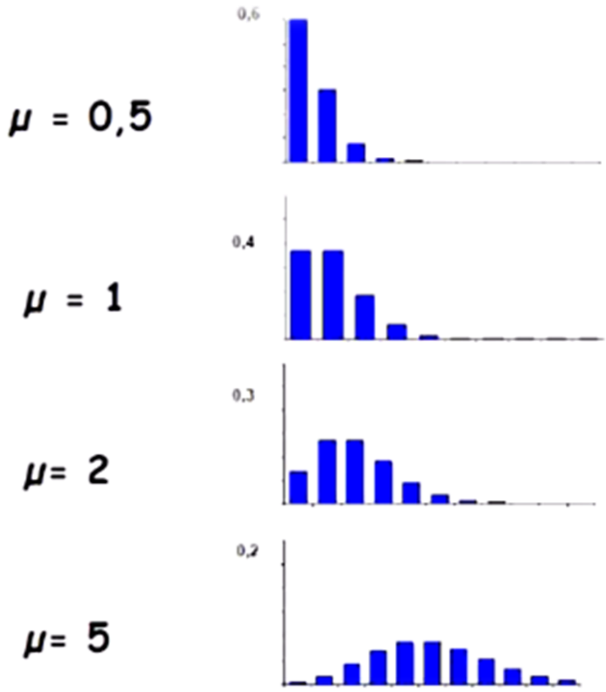
Probabilité de n'observer aucune entorse : Pr(0) =0,007
Probabilité de n'observer une entorse : Pr(1) =0,034
Probabilité de n'observer deux entorses : Pr(2) =0,084
Probabilité de n'observer trois entorses : Pr(3) =0,140
Probabilité de n'observer quatre entorses : Pr(4) =0,175
Probabilité de n'observer cinq entorses : Pr(5) =0,175
Probabilité de n'observer six entorses : Pr(6) =0,146
Probabilité de n'observer sept entorses : Pr(7) =0,104
Probabilité de n'observer huit entorses : Pr(8)=0,065

<u>Représentation graphique de la loi de poisson pour une moyenne attendue μ=5</u>



μ=5 Courbe symétrique

<u>Représentation graphique de la loi de poisson en fonction de la moyenne de survenue d'un événement μ</u>



On remarque que l'<u>asymétrie</u> de la courbe est importante pour <u>μ très faible</u>

IV. Propriété cumulative de la loi de poisson

Souvent la question posée n'est pas simplement la probabilité d'observer une seule valeur k, mais la probabilité d'observer

1. une valeur au plus égale à k
2. une valeur au moins égale à k
3.

1. Pr (valeur au plus égale à k) = Pr (0) + Pr (1) + ….. Pr(k-1) + Pr (k)

Quelle est la probabilité d'observer au maximum 3 entorses pendant un week-end sachant qu'en moyenne 5 cas d'entorses sont admis par week-end ?

Pr (3 malades maxi) = Pr (0) + Pr (1) +Pr (2) +Pr(3)

= 0,007 +0,034+0,084+0,140= 0,265

2. Pr (valeur au moins à k) =

Pr (k) = Pr (k+1) + Pr(k+2) ……
= 1 – Pr (valeur<k)

Exemple :
Quelle est la probabilité d'observer au moins 4 entorses pendant un week-end sachant qu'en moyenne 5 cas d'entorse sont admis par week-end ?

Pr (au moins 4 entorses) = 1- Pr (3 entorses maxi)
= 1 – 0,265 = 0,735 soit 73,5 %

V. Condition d'application de la loi de poisson

- Les évènements doivent être dénombrables.
- Les évènements doivent être indépendants les uns des autres
- Elle s'applique aux évènements rares (prob de survenue< 0,05)

Conclusion

Le plus difficile dans la loi de poisson :

- Ce n'est pas de faire les calculs
- Mais c'est de savoir quand il faut l'utiliser