VARIABLE ALEATOIRE

A.NOTION DE VARIABLE ALEATOIRE

I. DEFINITION

Une variable aléatoire X est une variable associée à une expérience ou groupe d'expériences aléatoires et servant à caractériser le résultat de cette expérience ou de ce groupe d'expériences.
On distingue les variables aléatoires discontinues ou discrètes et les variables aléatoires continues.
Par convention, on écrit habituellement :
En *majuscules* la variable ;
En *minuscules* la valeur déterminée que prend la variable, ce que l'on appelle ***la réalisation*** de la variable.

II. VARIABLE ALEATOIRE DISCONTINUE OU DISCRETE

2.1. Définition

Une variable aléatoire est discrète si elle varie de façon discontinue, la variable ne peut prendre que des valeurs entières (x_1, x_2, x_3, ……x_n)
Cet ensemble de valeurs forme ce qu'on appelle *l'ensemble de définition de la variable*
Nous avons un nombre fini des valeurs de la variable X.

Exemple :
-Soit X la variable aléatoire qui caractérise le résultat de l'expérience aléatoire *Jet d'un dé homogène*
X est une variable aléatoire discrète, elle peut prendre les valeurs entières 1, 2, 3, 4,5 et 6.

-Soit X la variable aléatoire qui caractérise le nombre de garçons dans une famille de quatre enfants.
X est une variable aléatoire discrète, elle peut prendre les valeurs entières 0, 1, 2,3, et 4.

2.2. Distribution de probabilité

A chacune des valeurs x_i que peut prendre une variable aléatoire X, correspond une probabilité $p(x_i)$, c'est la probabilité que la variable aléatoire X prenne la valeur x_i :

$$\mathbf{p(x_i) = p\,(X=x_i)}$$

-L'ensemble des valeurs admissibles x_i et des probabilités correspondantes $p(x_i)$, constitue **une distribution de probabilité discontinue**.

La relation entre x_i et p (xi) ou le couple (x_i, px_i) est appelée ***loi de probabilité de la variable X***

-La représentation graphique est le diagramme en bâtons.

-Pour toutes les distributions de probabilités dont les valeurs x correspondant à des événements complémentaires,
Le total des probabilités est égal à 1 $\boldsymbol{\sum p(x) = 1}$

-La distribution cumulée des probabilités est appelée ***fonction de répartition*** :

$$F(x)= Pr(X\leq x) =\sum px \quad \text{où} \quad 0 \leq F(x) \leq 1$$

Considérons les valeurs $x_1, x_2, x_3,............... x_n$ (rangées par ordre croissant), on a

$Pr (X< x_1)= 0$

$Pr (X< x_2) = Pr (X= x_1) = p_1$

$Pr (X< x_3) = Pr (X= x_1) + Pr (X= x_2) = p_1 + p_2$

$Pr (X< x_n) = p_1 + p_2 +..............+ p_{n-1}$

$Pr (X< x_a) = p_1 + p_2 +..............+ p_n =1$ pour tout $a > x_n$

Calculons $Pr (X> x_i)$:

$Pr (X> x_i) =1- (X\leq x_i)$

$=1- (X< x_{i+1})$

$=1- F(x_{i+1})$

Exemple :

Soit X la variable aléatoire qui caractérise le résultat de l'expérience aléatoire *jet d'un dé homogène*

X est une variable aléatoire discrète, elle peut prendre les valeurs entières 1, 2, 3, 4,5 et 6 avec la probabilité constante 1/6

Distribution de probabilité de X

x	p(x)	F(x)
1	1/6	1/6
2	1/6	2/6
3	1/6	3/6
4	1/6	4/6
5	1/6	5/6
6	1/6	6/6
Total	1	

III. VARIABLE ALEATOIRE CONTINUE :

Une variable aléatoire est continue si elle prend n'importe quelle valeur réelle appartenant à un intervalle donné fini ou infini (borné ou non borné).

-L'intervalle peut être **borné** : exemple pour un rendez-vous de consultation chez le médecin entre 16h et 17h, x peut prendre n'importe quelle valeur entre 16h et 17h.$\Omega = [16, 17]$

-L'intervalle peut être **non borné** : exemple durée de vie d'une ampoule électrique $\Omega = [0, +\infty]$.

La loi de probabilité de X est déterminée, si on connait pour tout intervalle (a,b) ; la probabilité qu'a X d'être compris entre a et b. Soit précisément la Pr(a<X<b)

Autres exemples :

Le poids est une variable aléatoire continue.

La taille est une variable aléatoire continue.

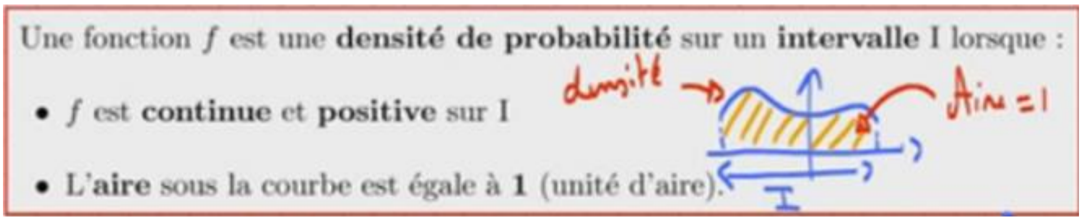
Un intervalle continu contient une infinité de valeurs. La probabilité d'obtenir exactement un résultat donné est généralement nulle bien que ce résultat ne soit pas strictement impossible.

P(X=x) $\approx$ 0

La notion ***de distribution de probabilité*** n'a donc plus de sens dans le cascontinu.
Pour une variable aléatoire continue, on calcule la probabilité d'observer une valeur comprise dans un intervalle donné $[x; x + \Delta x]$
Pour cela, nous utilisons ***la fonction de densité de probabilité.***

Densité de probabilité :
Définition : C'est une fonction f(x) positive telle que :
f(x)d(x)=Pr(x<X<x+dx) =
=probabilité d'appartenir à l'intervalle infiniment petit dx

Une densité est une fonction : définie sur un intervalle, si elle est continue, positive et l'aire sous courbe vaut 1



Par construction f(x) ou fonction de densité, est la dérivé de Pr(X<x) = F(x), donc par définition des intégrales, F(x) = $\int_{-\infty}^{x} f(x)dx$

Pour calculer les intégrales, il va falloir utiliser la fonction primitive F(x) de la fonction de densité $f(x)dx$ (voir le tableau ci-dessous)
Pour Pr (a<x<b) = F(b) - F(a) donc F(x) = $\int_{a}^{b} f(x)dx$

B.CARACTERISTIQUES D'UNE VARIABLE ALEATOIRE

I. ESPERANCE MATHEMATIQUE

1.1. Définition :

On appelle espérance mathématique la valeur moyenne de la variable, elle remplace la moyenne arithmétique d'une variable statistique

Cas discret : E (X) = Σx p(x)

Cas continu = E (X^2) =$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2$ x $f\ (x)dx$

Exemple :

Soit X variable aléatoire qui caractérise le nombre de garçons dans quatre enfants.

Distribution de probabilité de X

x	p(x)	F(x)
0	0,0625	0,0625
1	0,2500	0,3125
2	0,3750	0,6875
3	0,2500	0,9375
4	0,0625	1
Total	1	

E (X) $=\sum x \times p(x) = 0 \times 0{,}0625 + 1 \times 0{,}25 + 2 \times 0{,}375 + 3 \times 0{,}25 + 4 \times 0{,}0625 = 2$

Dans une famille de quatre enfants on doit s'attendre à avoir deux garçons.

P(X=0) = p(FFFF)=1*$\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.=\frac{1}{16}$=0,0625

P(X=1) = p(GFFF)=4* $\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.=\frac{1}{4}$=0,25

P(X=2) = p(GGFF)=6*$\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.=\frac{3}{8}$=0,375

P(X=3) = p(GGGF)=4* $\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.=\frac{1}{16}$=0,25

P(X=4) = p(GGGG)= 1* $\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.=\frac{1}{16}$=0,0625

1.2. Propriétés

- l'espérance d'une fonction d'une variable X est :

Cas discret : E (g(X)) = Σ g(x) x p(x)

Cas continu : $E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \times f(x)dx$

Exemple :

Cas discret : E (X²) = Σx^2 x p(x)

Cas continu = E (X²) =$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2$ x $f\ (x)dx$

- l'espérance d'une constante est la constante : E(a)=a
- l'espérance d'une transformation linéaire est la transformation linéaire de l'espérance :

$$\mathbf{E(a}x\mathbf{+b)}=\sum(\boldsymbol{ax}+\boldsymbol{b}) * \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) = \sum(\boldsymbol{axp}(\boldsymbol{x})) + \sum\big(\boldsymbol{b} * \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})\big) = \boldsymbol{a}\sum \boldsymbol{xp}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{b}\sum \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})$$

E(ax+b)=aE(X)+b

- L'espérance d'une somme est la somme des espérances :

E(X+Y)=E(X)+E(Y)

- L'espérance d'une différence est la différence des espérances :

E(X-Y)=E(X)-E(Y)

- L'espérance d'un produit est le produit des espérances si les variables sont Indépendantes :**E(X×Y)=E(X)×E(Y)**

II. VARIANCE ET ECART-TYPE

2.1. Définition

1- **Variance** : Comme pour la moyenne, la variance dune variable aléatoire conserve la même définition que la variance d'une variable statistique.
C'est l'espérance mathématique des carrés des écarts par rapport à l'espérance.

Cas discret : $V(X) = E[(X-E(X))^2] = \Sigma(x - E(X))^2 \times p(x)$

Cas continu : $V(X) = E[(X-E(X))^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x - E(X)^2 \times f(x)dx$

La variance est calculée à partir de la formule développée suivante :

$V(X)=E[(X - E(X)^2] = E[X^2 - 2XE(X) + E(X^2)] = E(X^2) - 2E(X)E(X) + E(X)^2$

D'où $V(X)= E(X^2)-E(X)^2$

La variance est donc égalé à la différence entre l'espérance mathématique des carrés et le carré de l'espérance mathématique.

2- **L'écart type** est égal à la racine carrée de la variance :$\sigma = \sqrt{V(X)}$

Exemple variable discrète :

- soit X variable aléatoire qui caractérise le nombre de garçons dans une famille de quatre enfants.

Distribution de probabilité de X :
nombre de garçons dans une famille de quatre enfants.

X	p(x)	F(x)
0	0,0625	0,0625
1	0,2500	0,3125
2	0,3750	0,6875
3	0,2500	0,9375
4	0,0625	1
Total	1	

$E(X)=\sum X \times P(x) = 0 \times 0{,}625 + 1 \times 0{,}25 + 2 \times 0{,}375 + 3 \times 0{,}25 + 4 \times 0{,}0625 = 2$

$E(X^2)=\sum x^2 \times P(x) = 0^2 \times 0{,}625 + 1^2 \times 0{,}25 + 2^2 \times 0{,}375 + 3^2 \times 0{,}25 + 4^2 \times 0{,}0625 = 5$

-$V(X)=E(X^2)-E(X)^2=5-2^2= 5-4=1$

-Ecart type est la racine carrée de 1 : $\sigma = \sqrt{1}=1$

Exemple variable continue :

Soit une variable aléatoire continue X définie par la fonction de densité de probabilité :

$$E(X)=\int_0^1 x\times dx=\left.\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\frac{1}{2} \qquad E(X^2)=\int_0^1 x^2\times dx=\left.\frac{x3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{3}$$

$$V(X)=E(X^2)-E(X)^2=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12} \qquad \text{et} \qquad \sigma=\frac{1}{\sqrt{12}}$$

Exercice d'application :

Un trader (commerçant) a analysé plusieurs scénarios quant à l'évolution de deux actions notées A et B. On note *X* la variable aléatoire donnant l'évolution en euros de l'action A et *Y* celle donnant l'évolution en euros de l'action B. Voici les lois de probabilités de *X* et de *Y*.

Valeur de *X*	-50	0	10	40
Probabilité	0,1	0,3	0,5	0,1

Valeur de *Y*	-30	10	30
Probabilité	0,3	0,4	0,3

Vérifier que E(*X*)= E(*Y*). Calculer Var(*X*) et Var(*Y*).

Corrigé :

E(*X*) = Σ x P(*X*=x) = -50×0,1+0×0,3+10×0,5+40×0,1 = 4
E(*Y*) = Σ y P(*Y*=y) = -30×0,3+10×0,4+30×0,3 = 4

Donc E(*X*) = E(*Y*)
Var(*X*)= $E(X^2)-[E(X)]^2$
$E(X^2)= (-50)^2\times0,1+0^2\times0,3+(10)^2\times0,5+(40)^2\times0,1= 460$ d'où $Var(X) = 460- (4)^2 = 444$

De même pour la variable *Y* :
Var(*Y*)= $E(Y^2)-[E(Y)]^2$ avec $E(X^2)= (-30)^2\times0,3+(10)^2\times0,4+(30)^2\times0,3$
$E(X^2)= 580$.
Alors $Var(Y)= 580-(4)^2 = 564$.

Tableau des fonctions de densités simples et leurs primitives

Fonction f	Primitives F_c	Intervalle I
0	c	$\mathbb{R}$
a	$ax+c$	$\mathbb{R}$
x	$\frac{x^2}{2}+c$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}+c$	$\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}+c$	$]0;+\infty[$
$x^s\ (s\neq -1)$	$\frac{x^{s+1}}{s+1}+c$	$]0;+\infty[$
$\cos(x)$	$\sin(x)+c$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$-\cos(x)+c$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x)+c$	$]0;+\infty[$
e^x	e^x+c	$\mathbb{R}$