MESURE DES PROBABILITES

Objectifs

1-Comprendre les concepts du hasard et des probabilités

2-Calculer les probabilités

3-Comprendre les règles relatives aux probabilités

4-Savoir utiliser le théorème de Bayes

Plan :

1-Introduction :

2- Définitions :

- 2.1. Notion d'aléatoire
- 2.2. Définition classique de la probabilité
- 2.3. Espace des possibles des évènements

3- Notion d'exclusivité :

- 3.1. Evènements exclusifs
- 3.2. Evènements mutuellement exclusifs
- 3.2. Evènements mutuellement complémentaires

4- Notion d'indépendance :

- 4.1. Probabilité conditionnelle
- 4.2. Evènements indépendants

5- Théorème de Bayes

1. INTRODUCTION

Le concept de probabilité a été d'abord associé aux jeux de hasard,

comme le lancement d'une pièce de monnaie ou le jet d'un dé… En réalité, les phénomènes auxquels s'applique la théorie des probabilités sont très variés. Ils ont en commun **l'incertitude du résultat.**

En médecine, de nombreuses situations se caractérisent par l'incertitude :
-le risque de cancer bronchique lorsqu'on est exposé à la cigarette,
-le risque de développer une neuropathie toxique lorsqu'on manipule du n-hexane (un produit chimique).

Les calculs de probabilité concernent l'ensemble des lois et règles qui permettent de mesurer le degré de certitude (ou d'incertitude) qui accompagne un résultat.
Avant de présenter les calculs de probabilité, nous définirons les notions d'expérience aléatoire, ensuite nous étudierons la notion de probabilité : définition et propriétés.
Nous présenterons aussi la notion d'exclusivité, la probabilité conditionnelle et la notion d'indépendance.
Enfin, nous terminerons le chapitre par le théorème de bayes.

2. DEFINITIONS

2.1. Notion d'aléatoire

La définition de la probabilité est liée aux notions d'expérience aléatoire.

- Une expérience est dite **aléatoire** lorsqu'on ne prévoir exactement le résultat, du fait que tous les facteurs qui déterminent ce résultat ne sont pas maitrisés.
  Répétée un certain nombre de fois (dans des conditions identiques), le résultat engendré n'est pas nécessairement le même car régi par le hasard
- Un événement aléatoire est un événement qui peut se réaliser ou ne pas se réaliser au cours d'une expérience aléatoire.

Exemples :
1-Le jet d'un dé numéroté de 1 à 6 : est une expérience aléatoire car le résultat du jet est imprévisible. L'événement : « avoir une face paire du dé »

est un événement aléatoire car le résultat du jet peut être impair comme il peut être pair.
Le choix d'une personne dans un groupe d'individus contenant des hommes des femmes est une expérience aléatoire car le résultat du choix est imprévisible. L'événement choisir une femme est un événement aléatoire car la personne choisie peut être une femme comme elle peut être un homme.

2.2. Définition classique de la probabilité

Si au cours d'une expérience aléatoire on peut dénombrer tous les résultats possibles, et si parmi ces résultats on peut dénombrer tous les résultats favorables à la réalisation d'un événement aléatoire quelconque A, on définit classiquement la probabilité de l'événement A comme étant le rapport du nombre de résultats favorables au nombre de résultats possibles.

$$P(A)=\frac{Nombre\ de\ résultats\ favorabeles}{Nombre\ de\ résultats\ possibles}$$

Il faut noter que tous les résultats possibles doivent avoir la même chance de réalisation.
Cette définition montre que la probabilité est toujours comprise **entre 0 et 1**.
Exemple :
Dans une urne contenant 20 boules blanches, 15 boules noires, 15 boules rouges et 10 boules vertes on choisit de façon aléatoire une boule.
Le tirage de la boule est une expérience aléatoire car le résultat du tirage est imprévisible. **L'événement choisir une boule blanche** est un événement aléatoire car la boule tirée peut être blanche comme elle peut être d'une autre couleur
Le nombre de boules pouvant être choisies est 60 car l'urne contient au total 60 boules. Le nombre de boules favorables à l'événement «boule blanche» est 20 car l'urne contient 20 boules blanches. La probabilité de tirer une blanche est donc :

$$P=\frac{20}{60}= 0,33$$

2.3. Espace des possibles et des évènements :

-Espace des possibles :
-Toute expérience dont on ne connait pas son issue s'appelle expérience aléatoire.

- Lancer un dé une ou plusieurs fois
- Tirer une boule d'une urne
- Tirer sur une cible,…

-L'ensemble de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire s'appelle espace d'épreuves ou ensemble fondamental et on le note Ω.

- Lors du lancer d'un dé $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$
- Lors du lancer de deux dés
  $\Omega = \{(1,1),(1,2),(1,3),\ldots(4.6),(4,6),(6,6)\}$

-Evénements

Si on considère Ω l'ensemble des cas possibles observables à l'issue d'une expérience aléatoire, un événement lité à cette être représenté par un sous ensemble A de Ω. D'où A ∈ P (Ω).

Tout sous ensemble de Ω s'appelle événement.
Il existe différents types d'événements

- Ω est appelé ensemble fondamental.
- Un événement élémentaire est un événement qui ne sera réalisé que par un seul résultat de l'épreuve aléatoire, on le notera $\{\omega\}$ et ω est appelé éventualité.
- Un évènement composé, est un évènement A∈ P (Ω) avec card (A) ≥ 2 s'appelle événement composé.

-Le langage ensembliste utilisé dans le cas d'événements on pourra utiliser

Si A et B sont deux événements liés à une expérience aléatoire.

- L'événement contraire de A noté $\bar{A}$ se produit si et seulement si A ne se réalise pas.
- L'événement **''A ou B ''** noté **A ∪ B** se produit si et seulement si A ou B ou les deux se réalisent.
- L'événement **''A et B''** noté **A ∩ B** se produit si et seulement si A et B se réalisent.
- Si A ∩ B = ∅ on dit que les deux événements sont incompatibles.
- L'événement **''A ou B ''** noté **A – B** signifie que A est réalisé mais B ne l'est pas
- Ω est l'événement certain car il se réalise toujours
- ∅ est l'événement impossible car il ne se réalise jamais
- La relation A ⊂ B signifie que la réalisation de B de entraine la réalisation de A

On appelle espace probabilisé fini le triplet (Ω, p (Ω), p)
Probabilité sur un espace fini
Définition
Soit Ω un espace fini et non vide, une probabilité p est une application de p (Ω) sur [0,1] telle que

a. P (Ω) = 1.
b. $\forall A \in p(\Omega)$, $\forall B \in P(\Omega)$ tels que $A \cap B = \emptyset$ on a
$$p(A \cup B) = p(A) + P(B)$$
c. Si A1, A2,…..A_n….. est une suite dénombrable d'événement incompatibles deux à deux alors

Propriété. $\forall A \in p(\Omega)$,$p(\bar{A}) = 1 - p(A)$
Remarque : $p(\emptyset) = 0$
$$\forall A \in P(\Omega), \forall B \in p(\Omega), on\ a\ p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

notations	vocabulaire ensembliste	vocabulaire probabiliste
Ω	ensemble plein	événement certain
$\emptyset$	ensemble vide	événement impossible
ω	élément de Ω	événement élémentaire
A	sous-ensemble de Ω	événement
$\omega \in A$	ω appartient à A	ω réalise A
$A \subset B$	A inclus dans B	A implique B
$A \cup B$	réunion de A et B	A ou B
$A \cap B$	intersection de A et B	A et B
A^c ou $\overline{A}$	complémentaire de A	événement contraire de A
$A \cap B = \emptyset$	A et B disjoints	A et B incompatibles

-Quelques remarques s'imposent :

- La probabilité fréquentielle ne sera jamais connue exactement puisqu'il est impossible d'exécuter une suite infinie d'essais :

- Certaines mesures de fréquences d'usage courant en épidémiologie sont de probabilités : la prévalence relative, l'incidence cumulative, la létalité …

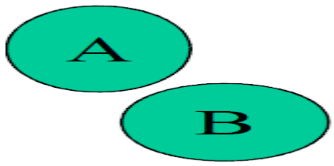
- La propriété fondamentale de toute probabilité est la suivante :

$$\mathbf{0 \leq P(E) \leq 1}$$

3. NOTION D'ECLUSIVITE

3.1 Evénements exclusifs

Deux événements aléatoires associés à une même expérience aléatoire sont dits exclusifs ou incompatibles s'ils ne peuvent pas réaliser simultanément.



-Si deux événements aléatoires A et B sont exclusifs alors :
p (A ou B) = p(A) + p (B)et p(A et B) = 0

-Si deux événements aléatoires A et B ne sont pas exclusifs alors :
p(A ou B) = p(A) + p(B) – p(A et B)

3.2 Événements mutuellement exclusifs

Plusieurs événements aléatoires **associés à une même expérience aléatoire**, sont dits mutuellement exclusifs ou mutuellement incompatibles s'ils sont exclusifs deux à deux.

-Si k événements A_1 , A_2 ,….. A_k sont mutuellement exclusifs alors :

$$\mathbf{p(A_1 \text{ ou } A_2 \text{ ou } \ldots\ldots \text{ ou } A_k) = p(A_1)+ p(A_2) +\ldots\ldots+ p(A_k)}$$

-Si trois événement aléatoires A, B et C ne sont pas mutuelles exclusifs alors :

$$\mathbf{P(A \text{ ou } B \text{ ou } C) = p(A)+p(B)+p(C) – p (A \text{ et } B) – p(B \text{ et } C) + p (A \text{ et } B \text{ et } C)}$$

Cette formule peut être généralisée à plusieurs événements non exclusifs, on l'appelle égalité de Poincaré.

$$p(A_1 ou A_2 ou \ldots ou A_n) = \sum_{i=1}^{n} p(A_i) - \sum p(A_i et A_j) + \sum p(A_i et A_j et A_k)$$

3.3. Evénements complémentaires

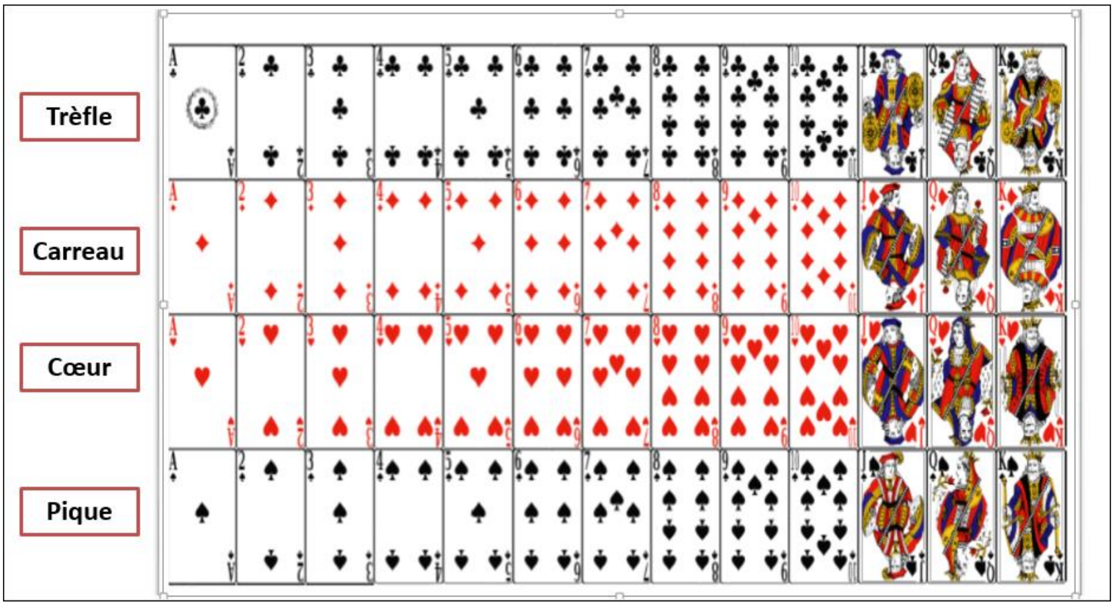
Plusieurs événements aléatoires **associés à une même expérience aléatoire** sont dits totalement exclusifs ou complémentaires s'ils sont exclusifs deux à deus et si l'un d'eux doit nécessairement se réaliser.

Si k événements : $A_1, A_2, \ldots\ A_K$ sont mutuellement exclusifs alors :

$$\mathbf{P(A_1 \text{ ou } A_2 \text{ ou } \ldots \text{ ou } A_k) = p(A_1) + p(A_2) + \ldots + p(A_k) = 1}$$

Exemple :

Dans un jeu de cartes contenant 13 cartes de cœur ,13 cartes carreau, 13 cartes trèfles on choisit de façon aléatoire une carte . Les 13 carte de chaque type sont les cartes As,2,3,4,5,6,7,8,9,10,valet , dame roi.



Soient les événements :

- A : tirer une carte cœur $\qquad p(A) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$
- B : tirer une carte carreau $\qquad p(B) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$
- C : tirer une carte pique $\qquad p(C) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$
- D : titrer une carte trèfle $\qquad p(D) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$
- E : titrer une carte As $\qquad p(E) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$
- F : titrer une carte dame $\qquad p\ (F) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

1-Probabilité de tirer une carte cœur ou carreau :

Les événements A et B sont exclusifs :

p(A ou B) = p(A) + p (B) = $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

2- Probabilité de tirer une carte cœur ou carreau ou As :

Les événements A et E ne sont pas exclusifs car on peut avoir A et E simultanément c'est le cas où on tire une carte As de cœur.

p(As de cœur)= p (A et E) = $\frac{1}{52}$

p(A ou E) = p (A) + p(E) – P(A et E) = $\frac{1}{4}+\frac{1}{13}-\frac{1}{52} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$

3-Probabilité de tirer une carte cœur ou carreau ou pique :

Les événement A , B et C sont mutuellement exclusifs :

p(A ou B ou C) = p(A) +p(B)+ p(C) = $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

4-Probabilité de tirer carte cœur ou carreau ou dame :

Les événement A,B, et F ne sont pas mutuellement exclusifs :
p(A ou B ou F)= p(A) +p(B)+p(F) – p(A et B) – p(A et F) – p(B et F) + p(A et B et F)
p(A ou B ou F)= $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{13} - 0 - \frac{1}{52} - \frac{1}{52} + 0 = \frac{28}{52} = \frac{7}{13}$

4. NOTION D'INDEPENDANCE

4.1. Probabilité conditionnelle

Considérons le cas de plusieurs expériences aléatoires simultanés ou successives .
Soient deux événements aléatoires A et B non nécessairement exclusifs.
La probabilité conditionnelle de l'événement A sous la condition B , est la probabilité de réalisation de l'événement A sachant t que l'événement B est déjà réalisé . Elle est désignée par :

$$\mathbf{p(\ A\ /\ B\ )} = \frac{p(A\ et\ B)}{p(B)}$$

Soient deux événement aléatoires A et B non nécessairement exclusifs.
La probabilité conditionnelle de l'événement B sous la condition A, est la probabilité de réalisation de l'événement B sachant que l'événement A est déjà réalisé . Elle est désignée par :

$$\mathbf{p(\ B\ /\ A\ )} = \frac{p(A\ et\ B)}{p(A)}$$

Cette définition conduit à la formule à probabilité composée :

p(A et B) = p(A) × $p(B/A)$ = p(B) × p (A/B)

$$P(A \cap B) = P(A \text{ si } B)\ P(B)$$

$$P(A \cap B) = P(B \text{ si } A)\ P(A)$$

$$P(A \text{ si } B)\ P(B) = P(B \text{ si } A)\ P(A)$$

On peut généraliser cette formule à plusieurs événements, ainsi pour trois événements A,B et C :

p(A et B et C) = p(A) × $p(B/A)$ × p(C/A et B)

Exemple :

Dans une urne contenant 20 boules blanches, 15 boules noires, 15 boules rouges et 10 boules vertes on choisit de façon aléatoire deux boules successives. Quelle est la probabilité que les deux boules tirées soient blanches ?

Soient A l'événement «première boule tirée est blanche» et B l'événement «deuxième boule tirée est blanche »

P(A) est la probabilité de tirer au premier tirage une boule blanche :

P(A) = $\frac{20}{60}$=0,33

p (B/A) est la probabilité de tirer au deuxième tirage une boule blanche sachant que la première boule est blanche

Au deuxième tirage l'urne contient donc 59 boules dont 19 sont blanches car on a déjà tiré une boule blanche. On a donc :

p(B/A) = $\frac{19}{59}$=0,32

p(A et B) = p(A) × $p(B/A)$ = 0,33 × 0,32 =0,1056

-Si on tire successivement trois boules, la probabilité que les trois boules soient vertes est :

$$\mathbf{p} = \frac{10}{60} \times \frac{9}{59} \times \frac{8}{58} = 0{,}0035$$

4.2. Evénements indépendants

Deux événements A et B sont indépendant si la probabilité de voir se réaliser l'événement A ne dépend pas de la réalisation ou de lanon-réalisation de l'événement B.
La probabilité de voir se réaliser l'événement B ne dépend pas de la réalisation ou de la non – réalisation de l'événement A.

p(A) = p(A/B)=p(A/ non B)
p(B) = p(B/A)=p(B/ non A)

Deux événements A et B sont donc indépendants si :
p(A et B) = p(A) $\times p(B)$
Plusieurs événements A_1 ,A_2 ,….. $A_k$sont indépendants si :
P(A_1 et A_2 et …… et A_k) = p(A_1)× p(A_2) ×.....×p(A_k)

Exemple :
On lance deux dés parfaitement homogènes numérotés de 1 à 6. Soient
-L'événement A : résultat du premier dé est impair ;
-L'événement B: résultat du deuxième dé est impair ;
-L'événement C : la somme des deux résultats est impair ;
P(A)=$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ p(B) =$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ p (C) =$\frac{18}{36} = \frac{1}{2}$

Soient les somme impaire des 02 résultats des dés (D1, D2)

D1/D2	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

- Indépendance de A et B :

p(A et B) = p(A) $\times p(B/\mathrm{A}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$= **p(A)** $\times \boldsymbol{p(B)}$
A et B sont donc indépendants.

- Indépendance de A et C :

$$\mathbf{p(A\ et\ C)} = p(A) \times p(C/A) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = \mathbf{p(A)\times p(C)}$$

A et C sont donc indépendants.

- Indépendance de B et C :

$$\mathbf{p(B\ et\ C) = p(B) \times p(C/B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = p(B) \times p(C)}$$

B et C sont donc indépendants.

- Indépendants de A, B et C

p(A et B et C) = 0,car la somme de deux résultats impaires ne peut pas être impaire.

$$\mathbf{p(A\ et\ B\ et\ C) \neq p(A) \times p(A) \times p(C)}$$

A,B et C sont donc dépendants

5. THEOREME DE BAYES

Soient E_1, E_2, …. E_K une sérié de k événements aléatoires totalement exclusifs . A chacun de ces événement correspond une information initiale qui permet d'évaluer **à priori** (à l'avance) les probabilité $p(E_1), p(E_2)$, …. $P(E_k)$

$$p(E_1)+p(E_2)+ \dots +P(E_k)=1$$

Soit A un événement quelconque pour lequel on connait à priori les probabilités conditionnelles $p(A/E_1), p(A/E_2), \dots, p(A/E_k)$.

Les événement E_1, E_2, E_kétant complémentaires , l'événement A doit se réaliser nécessairement avec E_1 ou E_2 ou ….ou E_k

Par définition de la probabilité conditionnelle :

$p(A \text{ et } E_i) = p(E_i) \times p(A/E_i)$ (i=1 à k)

La probabilité de l'événement A est donc :

$$p(A) = p(E_1)\times p(A/E_1) + p(E_2)\times p(A/E_2)+\dots+p(E_k)\times p(A/E_k)$$

$$p(A) = \sum_{i=1}^{k} p(E_i) \times p(A/E_i)$$

Le théorème de Bayes permet de calculer les probabilité conditionnelles à postériori $p(E_1/ A)$, $p(E_2/A)$,……,$p(E_k/A)$
Par définition de la probabilité conditionnelle :

$$p(E_i / A) = \frac{p(A \text{ et } E_i)}{p(A)}$$

$$p(E_i / A) = \frac{p(E_i) \times p(A / E_i)}{\sum_{i=1}^{k} p(E_i) \times p(A / E_i)}$$

Exemple :
Le tableau suivant donne la description de 400 étudiants d'une école selon le niveau d'études et l'option étudiée.

Niveau option	Gestion	Informatique	Total
1ére année	80	60	140
2éme année	75	25	100
3éme année	50	40	90
4éme année	45	25	70
Total	250	150	400

On a choisi au hasard un étudiant de l'école, il est inscrit en gestion.
Quelle est la probabilité qu'il soit inscrit en 1ére année,en 2éme année, en 3éme année et en 4éme année ?

Désignons par N_1, N2, N3 et N_4 les événements «niveau 1ére année»,«niveau 2éme année», « 3éme année» et «4éme année».

Ces 4 événements sont complémentaires :

$P(N_1) = \frac{140}{400} = 0{,}35$ $\quad$ $P(N_3) = \frac{90}{400} = 0{,}225$

$P(N_2) = \frac{100}{400} = 0{,}25$ $\quad$ $P(N_4) = \frac{70}{400} = 0{,}175$

Désignons par G l'événement «étudiant inscrit en gestion ».

- Probabilité qu'un étudiant de la première année soit inscrit en gestion

$$P(G/N_1) = \frac{80}{140} = 0{,}571$$

- Probabilité qu'un étudiant de la deuxième année soit inscrit en gestion :

  $P(G/N_2) = \frac{75}{100} = 0{,}75$

- Probabilité qu'un étudiant de la troisième année soit inscrit en gestion :

$$P(G/N_3) = \frac{50}{90} = 0{,}555$$

- Probabilité qu'un étudiant de la quatrième année soit inscrit en gestion :

$$P(G/N_4) = \frac{45}{70} = 0{,}643$$

La probabilité à postériori qu'un étudiant inscrit en gestion soit inscrit en 1éme année est :

$$P(N_1/G)=\frac{P(N_1)\times P(G/N_1)}{P(N_1)\times P(G/N_1)+P(N_2)\times P(G/N_2)+P(N_3)\times P(G/N_3)+P(N_4)\times P(G/N_4)}$$

$$=\frac{P(N_1\,\text{et}\,G)}{P(G)}$$

$$P(N_1/G)=\frac{0{,}35\times 0{,}571}{0{,}35\times 0{,}571+0{,}25\times 0{,}75+0{,}225\times 0{,}555+0{,}175\times 0{,}643}=0{,}32$$

La probabilité à postériori qu'un étudiant inscrit en gestion soit inscrit en 2éme année est :

$P(N_2/G)= \frac{p(N_2\ et\ G)}{p(G)}= 0{,}3$

La probabilité à postériori qu'un étudiant inscrit en gestion soit inscrit en 3éme année est :

$P(N_3/G)= \frac{p(N_3\ et\ G)}{p(G)}= 0{,}2$

La probabilité à postériori qu'un étudiant inscrit en gestion soit inscrit en 4éme année est :

$P(N_4/G)= \frac{p(N_4\ et\ G)}{p(G)}= 0{,}18$