I. Introduction

L'analyse combinatoire, fondée sur des formules de permutations et de combinaisons, possède d'importantes applications dans de nombreuses branches des mathématiques, comme par exemple dans la théorie des probabilités et en statistiques, où elles peuvent servir à compter le nombre d'arrangements possibles des éléments d'un système.

Au cours de ce chapitre nous définirons pour commencer la notion de dispositions ordonnées et disposition non ordonnée. Ensuite nous étudierons les différentes dispositions à savoir les permutations, les arrangements et les combinaisons.

II. Dispositions

Soient deux éléments a et b :
Si (a ,b)$\neq (b, a)$ alors on parle de disposition ordonnée.
Si (a ,b) $= (b, a)$ alors on parle de disposition non ordonnée.

On considère un ensemble E ayant 3 éléments, E= (a, b, c)
Choisir 2 éléments dans cet ensemble peut se faire de plusieurs manières différentes suivant que l'on ordonne les éléments et que l'on autorise la possibilité de choisir plusieurs fois le même objet ou non.
On visualise tous les cas possibles dans le tableau ci-dessous :

	Répétition	Sans Répétition
Avec ordre	aa ab ac ba bb bc ca cb cc	ab ac ba bc ca cb
Sans ordre	aa ab ac bb bc cc	ab ac bc

III. PERMUTATIONS

Une permutation est une disposition redonnée . le nombre de permutations que l'on peut faire avec n éléments est :

$$P_n = n\,! = n\times (n-1)\times(n-2)\times\ldots\times 2\times 1$$

Exemple :

Le nombre de permutations que l'on peut faire avec trois éléments a,b et c, est :

$$\mathbf{p_3 = 3\,! = 3 \times 2 \times 1 = 6}$$

Ces 6 permutations sont : (a, b, c),(a, c ,b),(b, a, c),(c ,a, b), et (c, b,).

IV. ARRANGEMENTS

4.1 Arrangements sans répétitions

C'est le nombre d'arrangements que l'on peut faire avec p éléments choisis parmi n éléments, chacun d'eux ne peut figurer qu'une fois les mêmes arrangements

Le nombre d'arrangements sans répétitions est :

$$\boldsymbol{A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}}$$

Exemple :

Le nombre d'arrangements sans répétitions que l'on peut faire avec deux éléments choisis parmi trois éléments a, b, c est :

$$A_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{3\times2\times1}{1} = 6$$

Ces 6 permutations sont : (a, b,),(b, a),(a, c),(c ,a,),(b, c) et (c, b,).

4.2. Arrangements avec répétitions

C'est le nombre d'arrangements que l'on peu faire avec p élément choisis parmi n éléments, chacun d'eux peut figurer plusieurs fois dans le même arrangements .

Le nombre d'arrangements avec répétition est : $\mathbf{n^p}$

Exemple :

Le nombre d'arrangements avec répétition que l'on peut faire avec deux éléments choisis parmi trois éléments a , b c est :3^2=9

Ces 9 arrangements sont : (a ,a),(a ,b), (b, a),(a, c),(c, a),(b, b),(b, c) (c, b) et (c, c) .

V. COMBINAISONS

5.1. Combinaisons sans répétitions

C'est le nombre de combinaisons que l'on peut faire avec p éléments choisis parmi n éléments, chacun d'eux ne peut figurer qu'une seule fois dans la même combinaison.
Le nombre de combinaisons sans répétitions est :

$$C_n^P = \frac{n!}{p! \times (n-p)!}$$

Exemple :

C'est le nombre de combinaisons sans répétitions que l'on peut faire avec deux éléments choisis parmi trois éléments a, b, c est

$$C_3^2 = \frac{3!}{2! \times 1!}$$

Ces 3 combinaisons sont : (a, b), (a, c), et (b, c)

5.2. Combinaisons avec répétitions

C'est le nombre de combinaisons que l'on peut faire avec p éléments choisis parmi n éléments, chacun d'eux peut figurer plusieurs fois dans la même combinaison.
Le nombre de combinaisons sans répétitions est :

$$K_n^P \;\; C_{n+P-1}^P = \frac{n+P-1!}{p! \times (n-p)!}$$

Exemple :

Le nombre de combinaisons avec répétitions que l'on peut faire avec deux éléments choisis parmi trois éléments a, b, c est

$$K_3^2 \;\; C_{3+2-1}^2 = C_4^2 \quad \frac{4!}{2! \times 2!} \quad = 6$$

Ces 6 combinaisons sont : (a, a) , (a, b), (a, c), (b, b) (b, c) et (c, c)

Exercice résolu

On tire 5 cartes d'un jeu de 32 et on appelle une **main** l'ensemble de ces 5 cartes.

1) Combien y a-t-il de mains de 5 cartes ?
2) Combien y a-t-il de mains contenant exactement deux cœurs ?
3) Combien y a-t-il de mains contenant au moins un roi ?

Solution :

1) Une main de 5 cartes représente en fait une combinaison de 5 cartes. En effet, on ne tient pas compte de l'ordre dans lequel on reçoit les cartes et on ne peut pas avoir deux fois la même carte ! Donc le nombre total de mains de 5 cartes vaut

$$\binom{32}{5} = 201376.$$

2) Pour fabriquer une main avec exactement 2 cœurs, il faut choisir 2 cœurs parmi 8, soit $\binom{8}{2}$ puis il reste 3 cartes à choisir parmi les 24 qui ne sont pas des cœurs, soit $\binom{24}{3}$. Au final, on a donc

$$\binom{8}{2} \times \binom{24}{3} = 56672 \text{ mains avec exactement 2 cœurs.}$$

3) Pour déterminer le nombre de mains avec au moins un roi, on peut compter celles avec exactement un roi, puis celles avec exactement deux rois, et ainsi de suite puis tout ajouter. En fait, il est plus simple de compter le nombre de mains avec aucun roi, puis de le soustraire du nombre total de mains. Le nombre de mains sans roi est de $\binom{28}{5}$ et donc le nombre de mains avec au moins un roi vaut

$$\binom{32}{5} - \binom{28}{5} = 103096.$$