Application des lois de probabilité

Dr. Meriem Bouhadjar

2020/2021

1. Lois de probabilité discrètes (Cas fini)

Loi de Bernoulli

Une v. a. de Bernoulli est une v. a. qui ne prend que deux valeurs possibles notées 1, associée à une probabilité p et 0, avec une probabilité $1-p$ (événement contraire)

1. Sa loi de probabilité définit la loi de Bernoulli de paramètre p
2. Moyenne :p
3. Variance :$p(1-p) = pq$
4. Concerne toutes les épreuves binaires : succès/échec, présence/absence, oui/non, vrai/faux, malade/non malade

Loi de Bernoulli

Une v. a. de Bernoulli est une v. a. qui ne prend que deux valeurs possibles notées 1, associée à une probabilité p et 0, avec une probabilité $1-p$ (événement contraire)

1. Sa loi de probabilité définit la loi de Bernoulli de paramètre p
2. Moyenne :p
3. Variance :$p(1-p) = pq$
4. Concerne toutes les épreuves binaires : succès/échec, présence/absence, oui/non, vrai/faux, malade/non malade

Loi de Bernoulli

Une v. a. de Bernoulli est une v. a. qui ne prend que deux valeurs possibles notées 1, associée à une probabilité p et 0, avec une probabilité $1-p$ (événement contraire)

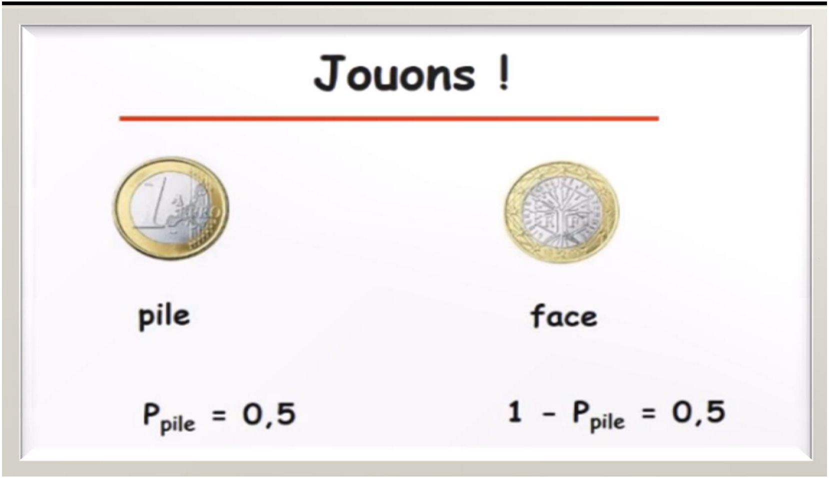
1. Sa loi de probabilité définit la loi de Bernoulli de paramètre p
2. Moyenne :p
3. Variance :$p(1-p) = pq$
4. Concerne toutes les épreuves binaires : succès/échec, présence/absence, oui/non, vrai/faux, malade/non malade

Loi de Bernoulli

Une v. a. de Bernoulli est une v. a. qui ne prend que deux valeurs possibles notées 1, associée à une probabilité p et 0, avec une probabilité $1-p$ (événement contraire)

1. Sa loi de probabilité définit la loi de Bernoulli de paramètre p
2. Moyenne :p
3. Variance :$p(1-p) = pq$
4. Concerne toutes les épreuves binaires : succès/échec, présence/absence, oui/non, vrai/faux, malade/non malade

Loi de Bernoulli



Loi de Bernoulli

Soit X, la variable aléatoire associé à une épreuve de Bernoulli de la manière suivante : en cas de succès $X = 1$ et en cas d'échec $X = 0$. On dit que X suit une loi de probabilité de Bernoulli où :

1. $P(X = 1) = p$
2. $P(X = 0) = 1 - p$

Loi de Bernoulli

Soit X, la variable aléatoire associé à une épreuve de Bernoulli de la manière suivante : en cas de succès $X = 1$ et en cas d'échec $X = 0$. On dit que X suit une loi de probabilité de Bernoulli où :

1. $P(X = 1) = p$
2. $P(X = 0) = 1 - p$

Loi de Bernoulli

Exemple. On lance un dé non trafiqué. On appelle succès : "obtenir un 6".
La variable aléatoire X associée suit une loi de Bernoulli :
$P(X = 1) = p = \frac{1}{6}$
$P(X = 0) = 1 - p = \frac{5}{6}$
On peut en déduire que :
$\mathbb{E}(X) = 1.\frac{1}{6} + 0.\frac{5}{6} = \frac{1}{6}$
et que : $\mathbb{E}(X) = 1.p + 0.(1 - p) = p$

$$\mathbb{E}(X) = p$$

La loi binomiale

C'est une expérience aléatoire constituée d'une suite d'épreuves de Bernoulli indépendantes où chaque épreuve ne peut conduire qu'aux 2 même résultats possibles (succès, échec) et où chacun de ces résultats a la même probabilité de réalisation d'une épreuve à l'autre

Processus Bernoulli et expérience Binomiale

Propriétés :

1. L'expérience est une série de n tirages identiques
2. Deux événements sont possibles à chaque tirage : succès et échec
3. La probabilité de succès, notée p, ne se modifie pas d'un tirage à l'autre. La probabilité d'échec $q = 1 - p$ ne se modifie pas non plus
4. Les tirages sont indépendants

Lorsque les propriétés 2,3, et 4 sont satisfaites, on dit que les tirages sont générés par un processus de Bernoulli. Si la propriété 1 est également satisfaite, il s'agit d'une expérience binomiale

Processus Bernoulli et expérience Binomiale

Propriétés :

1. L'expérience est une série de n tirages identiques
2. Deux événements sont possibles à chaque tirage : succès et échec
3. La probabilité de succès, notée p, ne se modifie pas d'un tirage à l'autre. La probabilité d'échec $q = 1 - p$ ne se modifie pas non plus
4. Les tirages sont indépendants

Lorsque les propriétés 2,3, et 4 sont satisfaites, on dit que les tirages sont générés par un processus de Bernoulli. Si la propriété 1 est également satisfaite, il s'agit d'une expérience binomiale

Processus Bernoulli et expérience Binomiale

Propriétés :

1. L'expérience est une série de n tirages identiques
2. Deux événements sont possibles à chaque tirage : succès et échec
3. La probabilité de succès, notée p, ne se modifie pas d'un tirage à l'autre. La probabilité d'échec $q = 1 - p$ ne se modifie pas non plus
4. Les tirages sont indépendants

Lorsque les propriétés 2,3, et 4 sont satisfaites, on dit que les tirages sont générés par un processus de Bernoulli. Si la propriété 1 est également satisfaite, il s'agit d'une expérience binomiale

Processus Bernoulli et expérience Binomiale

Propriétés :

1. L'expérience est une série de n tirages identiques
2. Deux événements sont possibles à chaque tirage : succès et échec
3. La probabilité de succès, notée p, ne se modifie pas d'un tirage à l'autre. La probabilité d'échec $q = 1 - p$ ne se modifie pas non plus
4. Les tirages sont indépendants

Lorsque les propriétés 2,3, et 4 sont satisfaites, on dit que les tirages sont générés par un processus de Bernoulli. Si la propriété 1 est également satisfaite, il s'agit d'une expérience binomiale

La loi binomiale

Si une variable aléatoire X représente le nombre de succès lorsqu'on effectue n épreuves de Bernoulli, alors X obéit à une distribution binomiale.
$X \backsim \mathcal{B}_i(n, p)$ Ce qui se lit «X suit une loi binomiale de paramètres n, p»
L'intérêt est de connaître le nombre de succès après n tirages

La loi binomiale

Remarque

Notion des paramètres

- n :le nombre d'épreuves successives réalisées.
- p :la probabilité de succès sur une seule épreuve.
- X :la variable aléatoire correspondant au nombre de succès lors de n épreuves. X prend alors les valeurs entières entre 0 et n c-à-d $X(\Omega) = \{0succes; 1succés; 2succés; ...; nsuccés\}$ quand peut l'exprimer par : $(X = 0; X = 1; ...; X = n)$.

La loi binomiale

Definition mathématique d'une v. a. binomiale

Soit $X \in \Omega = \{1, ..., n\}$ et les probabilités

$$\forall k \in \Omega, \mathbb{P}(X = k) = C_n^k . p^k . q^{n-k}$$

La loi binomiale

Remarque

$$C_n^k \text{ où encore } \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$$

Plusieurs valeurs remarquables existent comme :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} &= 1 \\ \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} &= 1 \\ \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} &= n \end{aligned}$$

Distribution binomiale

Paramètres d'une distribution binomiale

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= np \\ Var(X) &= np(1-p) = npq. \end{aligned}$$

Exemples

Exemple. On répond à un questionnaire, composé de deux question et où trois réponses sont proposés par question. On répond de manière aléatoire (cas peu crédible...).
Dans ce cas de figure, c'est alors un schéma de Bernoulli de paramètres 2 et $\frac{1}{3}$.

Exemples

Soit X, la variable aléatoire correspondant au nombre de bonnes réponses. X peut donc prendre trois valeurs : 0, 1 et 2. Donc $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$ et

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = 0) &= \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} \\ \mathbb{P}(X = 1) &= 2.\frac{1}{3}.\frac{2}{3} = \frac{4}{9} \\ \mathbb{P}(X = 2) &= \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} \end{aligned}$$

Exemples

Exemple. On lance 7 fois une pièce de monnaie bien équilibrée.
1- Quelle est la probabilité d'avoir 4 fois face ?
2- Calculer l'espérance mathématique $\mathbb{E}(X)$ et la variance $V(X)$

Exemples

Solution.

1- Cette variable suit une loi binomiale de paramètres $\mathcal{B}(7, \frac{1}{2})$

1. $n = 7$ (nombre d'épreuves avec remise)
2. les 2 éventualités :

$$\begin{aligned} p &= (succès) \\ q &= (échec) \end{aligned}$$

$p = \frac{1}{2}$ (avoir face) $q = 1 - p = \frac{1}{2}$(ne pas avoir face. Avoir pile)
$\mathbb{P}(X = k) = C_n^k.p^k.q^{n-k} = \mathbb{P}(X = 4) = C_7^4(0.5)^4(0.5)^3 = 0.2734$
2- $\mathbb{E}(X) = np = 7.0,5 = 3,5$
$V(X) = npq = 3,5.0,5 = 17,5$

Exemples

Solution.

1- Cette variable suit une loi binomiale de paramètres $\mathcal{B}(7, \frac{1}{2})$

1. $n = 7$ (nombre d'épreuves avec remise)
2. les 2 éventualités :

$$\begin{aligned} p &= (succès) \\ q &= (échec) \end{aligned}$$

$p = \frac{1}{2}$ (avoir face) $q = 1 - p = \frac{1}{2}$(ne pas avoir face. Avoir pile)

$\mathbb{P}\,(X = k) = C_n^k.p^k.q^{n-k} = \mathbb{P}\,(X = 4) = C_7^4(0.5)^4(0.5)^3 = 0.2734$

2- $\mathbb{E}(X) = np = 7.0, 5 = 3, 5$

$V(X) = npq = 3, 5.0, 5 = 17, 5$

Exemples

Exemple. Dans une population, il y a 49% de filles et 51% de garçons. Quelle est la probabilité que dans une famille de 5 enfants, il y ait au moins 3 garçons ?
Solution. Nombre d'épreuves : $n = 5$
les 2 issues : Succès : $p = 0,51$ (avoir un garçon)
Échec : $q = 0,49$ (avoir une fille)

Exemples

la variable X suit une loi binomiale de paramètre $\mathcal{B}(n,p) \rightarrow \mathcal{B}(5;0,51)$
$\mathbb{P}(X=k) = C_n^k.p^k.q^{n-k} \rightarrow P(X \geq 3) = P(X=3) + P(X=4) + P(X=5)$

- $P(X \geq 3) = C_5^3(0,51)^3(0.49)^2 + C_5^4(0,51)^4(0.49)^1 + C_5^5(0,51)^5(0.49)^0$

$P(X \geq 3) = 0,319 + 0,162 + 0,035 = 0,516$

- $P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - [P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)]$

$P(X \geq 3) = 1 - [C_5^0(0,51)^0(0.49)^5 + C_5^1(0,51)^1(0.49)^4 + C_5^2(0,51)^2(0.49)^3]$
$P(X \geq 3) = 1 - [0,028 + 0,148 + 0,307] = 1 - 0,4083 = 0,517$

Exemples

Exemple. Dans les familles de 3 enfants, quelle est la probabilité d'avoir 2 filles ?. La probabilité de naissance d'une fille est $p = 0,48$

Solution. $n = 3, k = 2, p = 0,48$ et $q = 1 - p = 0,52$

$\mathbb{P}(X = k) = C_n^k.p^k.q^{n-k}$

$\mathbb{P}(X = 2) = C_3^2.(0,48)^2.(0,52)^1 = 0,359$

Quel est le nombre moyen de filles et la variance ?

$\mathbb{E}(X) = np = 3(0,48) = 1,44$

$Var(X) = npq = 3(0,48)(0,52) = 0,75$

Loi de Poisson

En théorie des probabilités et en statistiques, la loi de Poisson est une loi de probabilité discrète qui décrit le comportement du nombre d'évènements se produisant dans un laps de temps fixé, si ces évènements se produisent avec une fréquence moyenne connue et indépendamment du temps écoulé depuis l'évènement précédent.

Loi de Poisson

Si le nombre moyen d'occurrences dans cet intervalle est λ, alors la probabilité qu'il existe exactement k occurrences (k étant un entier naturel,$k = 0, 1, 2, ...$)est

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

On dit alors que X suit la loi de Poisson de paramètre λ et on écrit :

$$X \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda)$$

Loi de Poisson

Par exemple, si un certain type d'évènements se produit en moyenne 4 fois par minute, pour étudier le nombre d'évènements se produisant dans un laps de temps de 10 minutes, on choisit comme modèle une loi de Poisson de paramètre

$$\lambda = 10.4 = 40.$$

Loi de Poisson

Paramètres d'une distribution de Poisson :
La rareté du phénomène (p très petit, et q tend vers 1, nous conduit à une valeur moyenne

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= np; Var(X) = np. \\ \mathbb{E}(X) &= \lambda; Var(X) = \lambda. \end{aligned}$$

Application de la loi de Poisson

Exemple. Sachant que dans un service d'urgences on accueille en moyenne 5 entorses par week-end, quelle est la probabilité d'observer 3 entorses au cours du prochain week-end ?

Solution.

Loi de Poisson, avec $\lambda = 5$ et $k = 3$

$\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$

$\mathbb{P}(X = 3) = e^{-5} \frac{5^3}{3!} = 0.14$

Approximation de la loi Binomiale par la loi de Poisson

Si n est grand et p assez petit (dans la pratique si $n \geq 30$ et $p \leq 0,1$ avec $np \leq 10$) on peut remplacer la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ par la loi de Poisson $\mathcal{P}(np), (\lambda = np)$.

Approximation de la loi Binomiale par la loi de Poisson

Exemple. Suite ‘a une vaccination contre le paludisme, dans une population à risque, on estime à 2%, compte tenu du délai d'immunisation, la proportion de personnes qui seront pourtant atteintes de la maladie. En utilisant la loi binomiale puis la loi de Poisson, quelle est la probabilité de constater, lors d'un contrôle dans un petit village de 100 habitants tous récemment vaccines, plus d'une personne malade ?
(on supposera l'indépendance des éventualités).
Compte tenu des hypothèses, le nombre de malades est ici régi par une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,02$. $\mathcal{B}(100; 0,02)$

Approximation de la loi Binomiale par la loi de Poisson

Solution.
les conditions d'approximation par une loi de Poisson sont vérifiés

- $n \geq 30 \rightarrow 100 > 30$ (la taille est grande)
- $p = 0,02 \rightarrow$ (la probabilité est faible).
- $\lambda = np = 100.0,02 = 2 \leq 10$

$P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)]$
$= 1 - [e^{-2} \times \frac{2^0}{0!} + e^{-2} \times \frac{2^1}{1!}] = 1 - [0,1353 + 0,2707]$
$= 1 - 0,406 = 0,594$
$P(X > 1) = 0,594$

Lois de probabilité continues :Loi normale (ou loi de gauss)

En théorie des probabilités et en statistique, la loi normale est l'une des lois de probabilité les plus adaptées pour modéliser des phénomènes naturels . Elle est également appelée loi gaussienne, loi de Gauss ou loi de Laplace-Gauss des noms de Laplace (1749-1827) et Gauss (1777-1855), deux mathématiciens, astronomes et physiciens qui l'ont étudiée.

Loi normale (ou loi de gauss)

Plus formellement, c'est une loi de probabilité absolument continue qui dépend de deux paramètres : son espérance, un nombre réel noté μ, et son écart type, un nombre réel positif noté σ. La densité de probabilité de la loi normale est donnée par :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Loi normale (ou loi de gauss)

La courbe de cette densité est appelée courbe de Gauss ou courbe en cloche. Lorsqu'une variable aléatoire X suit la loi normale, elle est dite gaussienne ou normale et il est habituel d'utiliser la notation suivante :

$$X \backsim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$$

Loi normale (ou loi de gauss)

- Une variable aléatoire X est dite centrée si son espérance mathématique est nulle.
- Une variable aléatoire X est dite réduite si son écart-type est égal à 1.
- Une variable aléatoire centrée réduite est dite standardisée.

Loi normale (ou loi de gauss)

Les paramètres

$$\mathbb{E}(X) = \mu ; Var(X) = \sigma^2$$

Loi normale (ou loi de gauss)

Loi normale centrée réduite

La variable aléatoire $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale cetrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$ Tout problème relatif a X se ramène a Z et on dispose de plusieurs tables concernant la loi normale centrée réduite.

Approximation de la loi binomiale par une loi normale

Approximation de la loi binomiale par une loi normale

Si n est grand et p pas trop voisin de 0 et de 1 (dans la pratique si $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $nq \geq 5$) on peut remplacer la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ par la loi normale $\mathcal{N}(np, \sqrt{npq})$.

Loi de probabilité du Khi carré

Definition

La loi du Khi carré (ou Khi deux) est une loi de probabilité que suivent certaines variables aléatoires continues indépendantes. De façon générale, si une variable aléatoire X suit une loi normale quelconque, alors le carré de celle-ci (X^2) suivra une loi du Khi carré. De même, si n variables aléatoires indépendantes $X_1, X_2, X_3, ..., X_n$ suivent des lois normales alors la somme des carrés de chacune de ces variables suit une loi du Khi carré. On écrit alors : Si

$$Y = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + ... + X_n^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

alors Y suit une loi du Khi deux avec un degré de liberté ν (nu) égale à n.

Loi de probabilité du Khi carré

Les paramètres. Si la variable Y suit une loi du $\mathcal{X}^2$ à n degré de liberté, alors

$$\mathbb{E}(Y) = n; Var(Y) = 2n.$$

remarque : la fonction densité de probabilité de $\mathcal{X}_n^2$ est

$$f_{\mathcal{X}_n^2}(t) = c_n t^{n/2-1} e^{-t/n}$$