Cours Biomathématiques-Biostatistiques
$1^{ère}$ année Pharmacie 2020/2021

Dr. M. Hamamda

23 janvier 2021

TABLE DES MATIÈRES

Première partie

Biomathématiques

CHAPITRE 1

Chapitre 1 : Fonctions réelles d'une variable réelle

Dans ce chapitre, nous allons rappeler quelques notions de base sur les fonctions réelles d'une variable réelle : domaine de définition, parité de la fonction, continuité, dérivabilité, ...

1.1 Généralités

Définition 1.1.1 *Soit E une partie non vide de $\mathbb{R}$ ($\varnothing \neq E \subset \mathbb{R}$), où $\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réelles. On appelle **fonction** d'une variable réelle à valeurs réelles toute application*

$$f: \begin{array}{l} E \to \mathbb{R} \\ x \to f(x). \end{array}$$

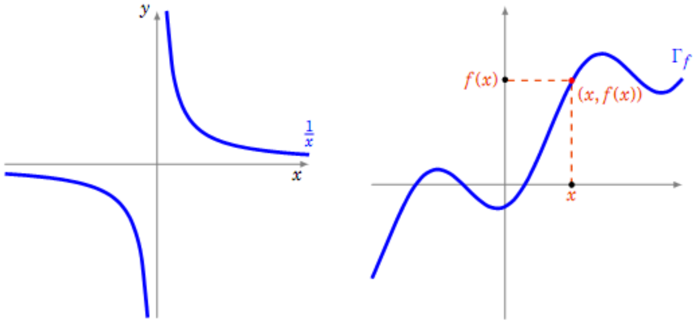
On appelle E domaine de définition de f.

Exemple 1.1.1 1. *La fonction inverse* $f: \begin{array}{l}]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[\to \mathbb{R} \\ x \to \frac{1}{x} \end{array}$.

2. *La fonction* $f: \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to 2x+1 \end{array}$

3. La fonction $f: \begin{array}{l} \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \\ x \to \sqrt{x} \end{array}$

Définition 1.1.2 ***Le graphe*** *d'une fonction* $f : E \to \mathbb{R}$ *est la partie* Γ_f *de* $\mathbb{R}^2$ *définie par* $\Gamma_f = \{(x, f(x))/x \in E\}$ *. FIG 1.1.2.*



Le graphe d'une fonction

1.1.1 Parité et périodicité

Dans un but d'économie d'énergie, nous allons chercher à réduire au maximum l'ensemble des valeurs où il est nécessaire d'étudier une fonction. Soit f une fonction définie sur $I \subset \mathbb{R}, f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (I est symétrique par rapport à l'origine 0)

Définition 1.1.3
- *La fonction* f *est dite* ***paire*** *si* $f(-x) = f(x), \forall x \in I$. *Graphiquement,* f *est paire si et seulement si son graphe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.*
- *La fonction* f *est dite* ***impaire*** *si* $f(-x) = -f(x), \forall x \in I$. *Graphiquement,* f *est impaire si et seulement si son graphe est symétrique par rapport à l'origine.*
- *La fonction* f *est dite* ***périodique*** *s'il existe* $T > 0$ *tel que* $f(x+T) = f(x)$. *Graphiquement,* f *est périodique de période* T *si et seulement si*

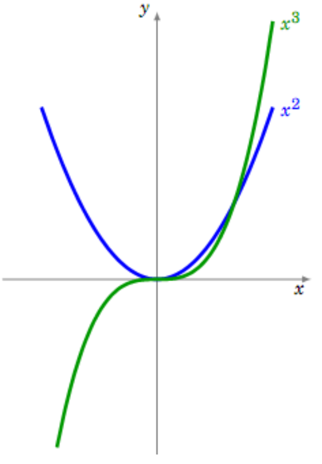


FIG. 1.1 – Le graphe de x^2 et x^3

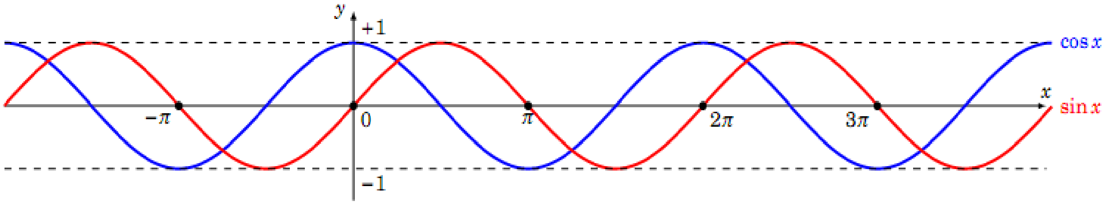


FIG. 1.2 – Le graphe de cosinus et sinus

son graphe est invariant par la translation de vecteur $T\overrightarrow{i}$, où $\overrightarrow{i}$ est le premier vecteur de coordonnées.

Exemple 1.1.2
- *Les fonctions : $x \to x^2, x \to \cos(x)$ sont paires. FIG 1.1.*
- *Les fonctions : $x \to x^3, x \to \tan(x)$ sont impaires. FIG 1.1.*
- *Les fonctions sinus cosinus sont 2π-périodiques. FIG 1.2.*

1.1.2 Fonction monotone

Définition 1.1.4 *Soit $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.*

– f *est dite* ***croissante*** *(resp.* ***strictement croissante****) sur* E *si :*

$$\forall (x,y) \in E^2 : x \leq y \Longrightarrow f(x) \leq f(y)$$

$$(\textit{resp. } \forall (x,y) \in E^2 : x < y \Longrightarrow f(x) < f(y)).$$

– f *est dite* ***décroissante*** *(resp.* ***strictement décroissante****) sur* E *si :*

$$\forall (x,y) \in E^2 : x \leq y \Longrightarrow f(x) \geq f(y)$$

$$(\textit{resp. } \forall (x,y) \in E^2 : x < y \Longrightarrow f(x) > f(y)).$$

– f *est* ***monotone*** *(resp.* ***strictement monotone****) sur* E *si elle est* ***croissante*** *ou* ***décroissante*** *(resp.* ***strictement croissante*** *ou* ***strictement décroissante****).*

1.1.3 Bijection et fonction réciproque

Soit $f : E \to F$ une fonction, où E et F sont deux parties de $\mathbb{R}$.

Définition 1.1.5
– f *est* ***injective*** *si* $\forall x, x' \in E, f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x'$.
– f *est* ***surjective*** *si* $\forall y \in F, \exists x \in E : y = f(x)$.
– f *est* ***bijective*** *si elle est à la fois injective et surjective, c-à-d :* $\forall y \in F, \exists! x \in E : y = f(x)$.

Propriétés 1.1.1 *Si* $f : E \to F$ *est une fonction* ***bijective*** *alors il existe une unique application* $g : F \to E$ *telle que* $g \circ f = Id_E$ *et* $f \circ g = Id_F$*. La fonction* g *est* ***la bijection réciproque*** *de* f *notée* f^{-1}*.*

Exemple 1.1.3 *Soit la fonction* $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to 2x-1 \end{array}$ *, alors on a :*

1. $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R},\ f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow 2x_1 - 1 = 2x_2 - 1 \Longrightarrow 2x_1 = 2x_2 \Longrightarrow x_1 = x_2$ *ce qui montre que* f *est injective.*
2. $\forall y \in \mathbb{R}, f(x) = y \Longrightarrow 2x - 1 = y \Longrightarrow x = \frac{y+1}{2} \in \mathbb{R},$ *alors* $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} : f(x) = y$ *donc* f *est surjective.*

3. *f est injective et surjective alors f est bijective, elle admet une bijection réciproque* $f^{-1}: \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to \frac{y+1}{2} \end{array}$.

Exemple 1.1.4 *Soit la fonction* $f: \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \\ x \to x^2 \end{array}$ *, remarquons que pour $x_1 = 2$ et $x_2 = -2$, $f(x_1) = f(x_2) = 4$, donc $\exists x_1 \neq x_2$ telles que $f(x_1) = f(x_2)$ ce qui justifie que f n'est pas injective.*

1.2 Limites

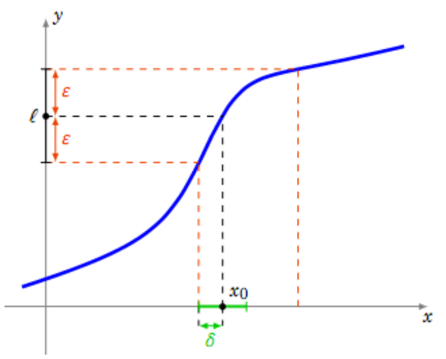
1.2.1 Limite en un point

Soit $f : E \to \mathbb{R}$ ($E \subset \mathbb{R}$). Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ un point de E.

Définition 1.2.1 *Soit $l \in \mathbb{R}$. On dit que f a pour **limite** l en x_0 si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in E : |x - x_0| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

*On dit aussi que f **tend vers** l lorsque x tend vers x_0. On note alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ ou bien $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} l$.*



Définition 1.2.2 – *On dit que f a pour limite $+\infty$ en x_0 si*

$$\forall A > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I : |x - x_0| < \alpha \Longrightarrow f(x) > A$$

On note alors $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$

– *On dit que* f *a pour limite* $-\infty$ *en* x_0 *si*

$$\forall A > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I : |x - x_0| < \alpha \Longrightarrow f(x) < -A$$

On note alors $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$

1.2.2 Limite en l'infini

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle de la forme $I =]a, +\infty[$

Définition 1.2.3 *Soit* $l \in \mathbb{R}$.

– *On dit que* f *a pour limite* l *en* $+\infty$ *si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists B > 0, \forall x \in I : x > B \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

on note alors $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$.

– *On dit que* f *a pour limite* $+\infty$ *en* $+\infty$ *si*

$$\forall A > 0, \exists B > 0, \forall x \in I : x > B \Longrightarrow f(x) > A$$

on note alors $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

1.2.3 Opérations sur les limites

Propriétés 1.2.1 *Soit* $f, g : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1$, $\lim_{x \to x_0} g(x) = l_2$

1. $\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = l_1 + l_2$.
2. $\lim_{x \to x_0} \lambda f(x) = \lambda l$.
3. $\lim_{x \to x_0} [f(x).g(x)] = l_1.l_2$.
4. $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2}$.

Remarque 1.2.1 *Il y a des situations où l'on ne peut rien dire sur les limites. Par exemple si* $\lim\limits_{x\to x_0} f = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to x_0} g = -\infty$ *alors on ne peut a priori rien dire sur la limite de* $f + g$ *(cela dépend vraiment de* f *et de* g*). On raccourci cela en* $+\infty - \infty$ *est une forme indéterminée. Voici une liste de* ***formes indéterminées*** *:* $+\infty - \infty$, $0.\infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, 1^{∞} *et* ∞^0.

Exemple 1.2.1
1. $\lim\limits_{x\to 2} 5x^2 - 1 = 19$.
2. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{3x^2}{x-2} = +\infty$.
3. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{0}{0}(FI) = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{1}{(x+1)} = \frac{1}{2}$.

1.3 Fonctions continues

1.3.1 Continuité en un point

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

Définition 1.3.1
1. *On dit que* f *est* ***continue en un point*** $x_0 \in I$ *si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I : |x - x_0| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

autrement dit : si f *admet une limite en* x_0 *alors* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

2. *On dit que* f *est* ***continue sur*** I *si* f *est continue en tout point de* I.

3. *Intuitivement, une fonction est continue sur un intervalle, si on peut tracer son graphe « sans lever le crayon », c'est-à-dire si elle n'a pas de saut*

Exemple 1.3.1
1. *Les fonctions suivantes sont continues :*
2. *Une fonction constante sur un intervalle.*
3. *La fonction racine carrée* $x \to \sqrt{x}$ *sur* $[0, +\infty[$.
4. *Les fonction* $\sin x$ *et* $\cos x$ *sur* $\mathbb{R}$.
5. *La fonction valeur absolue* $x \to |x|$ *sur* $\mathbb{R}$.

6. *La fonction* $\exp x$ *sur* $\mathbb{R}$.
7. *La fonction* $\ln x$ *sur* $]0, +\infty[$.

1.3.2 Opérations sur les fonctions continues

Propriétés 1.3.1 *Soient* $f, g : I \to \mathbb{R}$ *deux fonctions continues en un point* $x_0 \in I$. *Alors :*

1. $\lambda.f$ *est continue en* x_0 *(pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$*).*
2. $f + g$ *est continue en* x_0.
3. $f \times g$ *est continue en* x_0.
4. *Si* $f \neq 0$, *alors* $\frac{1}{f}$ *est continue en* x_0.

1.4 Fonctions dérivables

1.4.1 Dérivée d'une fonction

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit $x_0 \in I$

Définition 1.4.1
1. f *est* ***dérivable en*** x_0 *si* ***le taux d'accroissement*** $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ *a une limite finie lorsque* x *tend vers* x_0. *La limite s'appelle alors le* ***nombre dérivée*** *de* f *en* x_0 *et est noté* $f'(x_0)$. *Ainsi*

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

2. f *est* ***dérivable sur*** I *si* f *est dérivable en tout point* x_0 *de* I. *La fonction* $x \to f'(x)$ *est la fonction dérivée de* f, *elle se note* f' *ou* $\frac{df}{dx}$.

Exemple 1.4.1 *Soit la fonction définie par* $f(x) = x^3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *on étudie la* *dérivabilité de f en $x_0 \in \mathbb{R}$*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} &= \lim_{x\to x_0}\frac{x^3-x_0^2}{x-x_0}\\ &= \lim_{x\to x_0}\frac{(x-x_0)(x^2+x_0x+x_0^2)}{x-x_0}\\ &= \lim_{x\to x_0} x^2+x_0x+x_0^2\\ &= 3x_0^2\end{aligned}$$

Alors f est dérivable en tout point $x_0 \in \mathbb{R}$, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Propriétés 1.4.1 *Soit I un intervalle ouvert, $x_0 \in I$ et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.*

1. *Si f est **dérivable en** x_0, alors elle est **continue en** x_0.*
2. *Si f est **dérivable sur** I, alors elle est **continue sur** I.*

Remarque 1.4.1 ***La réciproque est fausse*** *: par exemple, la fonction valeur absolue $x \to |x|$ est continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0.*

1.4.2 Dérivée à droite et à gauche

Définition 1.4.2

1. *Si $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ >}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe et finie, on dit que f est dérivable à droite de x_0. On note alors **la dérivée à droite** par $f'_d(x_0)$.*
2. *Si $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ <}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe et finie, on dit que f est dérivable à gauche de x_0. On note alors **la dérivée à gauche** par $f'_g(x_0)$.*
3. *f est dérivable $\Longrightarrow f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.*

Exemple 1.4.2 *Soit la fonction $f : \begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+\\ x \to |x|\end{array}$ (valeur absolue). On étudiant la dérivabilité de f au point $x_0 = 0$, cette fonction peut s'écrire $f(x) = \begin{cases} -x & si\ \ x \leq 0 \\ x & si\ \ x > 0\end{cases}$. Alors,*

1. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{-x}{x} = -1$, *donc* f *est dérivable à gauche de* 0 *et* $f'_g(0) = -1$.
2. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{x} = 1$, *donc* f *est dérivable à droite de* 0 *et* $f'_d(0) = 1$.
3. f *n'est pas dérivable au point* $x_0 = 0$ *car* $f'_g(0) \neq f'_d(0)$.

1.4.3 Opérations sur les fonctions dérivables

Propriétés 1.4.2 *Soient* $f, g : I \to \mathbb{R}$ *deux fonctions dérivables sur* I. *Alors pour tout* $x \in I$:

1. $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$,
2. $(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$ *où* λ *est un réel fixé,*
3. $(f \times g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$,
4. $(\frac{1}{f})'(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)^2}$ *si* $f(x) \neq 0$,
5. $(\frac{f}{g})'(x) = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$ *si* $g(x) \neq 0$.

1.4.4 Dérivée de fonctions usuelles

Le tableau de gauche est un résumé des principales formules à connaître, x est une variable. Le tableau de droite est celui des compositions, u est une fonction $x \to u(x)$.

1.4.5 Composition

Propriétés 1.4.3 *Si* f *est dérivable en* x *et* g *est dérivable en* $f(x)$ *alors* $g \circ f$ *est dérivable en* x *de dérivée :*

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)).f'(x).$$

Corollaire 1.4.1 *Soit* I *un intervalle ouvert, Soit* $f : I \to J$ *une fonction dérivable et bijective dont on note* $f^{-1} : J \to I$ *la bijection réciproque. Si* f'

Fonction	Dérivée
x^n	$nx^{n-1} \quad (n \in \mathbb{Z})$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$
$\tan x$	$1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

Fonction	Dérivée
u^n	$nu'u^{n-1} \quad (n \in \mathbb{Z})$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\sqrt{u}$	$\frac{1}{2}\frac{u'}{\sqrt{u}}$
u^α	$\alpha u'u^{\alpha-1} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$
e^u	$u'e^u$
$\ln u$	$\frac{u'}{u}$
$\cos u$	$-u'\sin u$
$\sin u$	$u'\cos u$
$\tan u$	$u'(1+\tan^2 u) = \frac{u'}{\cos^2 u}$

FIG. 1.3 – Dérivée des fonctions usuelles

ne s'annule pas sur I alors f^{-1} est dérivable et on a pour tout $x \in J$:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Exercise 1 *Démontrer ce corollaire.*

1.4.6 Dérivées successives

- Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et soit f' sa dérivée.
- Si f' est aussi dérivable on note $f'' = (f')'$ la dérivée seconde de f.
- Plus généralement on note :

$$f^{(0)} = f, f^{(1)} = f', f^{(2)} = f'', f^{(3)} = f''', ..., f^{(n+1)} = (f^{(n)})'.$$

- Si la dérivée $n^{ième}$ notée $f^{(n)}$ existe on dit que f est n fois dérivable.

Exemple 1.4.3 *Soit la fonction $f(x) = x^5$, f est définie, continue et déri-*

vable n fois sur $\mathbb{R}$, En effet,

$$\begin{aligned}
f^{(1)}(x) &= 5x^4 \\
f^{(2)}(x) &= 20x^3 \\
f^{(3)}(x) &= 60x^2 \\
f^{(4)}(x) &= 120x \\
f^{(5)}(x) &= 120 \\
f^{(6)}(x) &= 0 \\
& \quad .... \\
f^{(n)}(x) &= 0, \forall n \geq 6.
\end{aligned}$$

1.4.7 Formule de Leibniz

Maintenant, nous allons chercher la dérivée $n^{ième}$ d'un produit de deux fonctions en utilisant la formule de Leibniz

$$(f.g)^{(n)} = f^{(n)}.g + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} f^{(n-1)}.g^{(1)} + ... + \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} f^{(n-k)}.g^{(k)} + ... + f.g^{(n)}$$

où

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

autrement dit :

$$(f.g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} f^{(n-k)}.g^{(k)}.$$

Exemple 1.4.4

1. *Pour $n = 1, (f.g)^{(1)} = f'.g + f.g'$.*
2. *Pour $n = 2, (f.g)^{(2)} = f''g + 2f'g' + fg''$.*
3. *Pour $n = 3, (f.g)^{(3)} = f^{(3)}g^{(0)} + 3f^{(2)}g^{(1)} + 3f^{(1)}g^{(2)} + f^{(3)}g^{(0)}$.*

1.4.8 Règle de l'hôspital

Théorème 1.4.1 *Soient* $f, g : I \to \mathbb{R}$ *deux fonctions dérivables et soit* $x_0 \in I$. *On suppose que :*

1. $f(x_0) = g(x_0) = 0.$
2. $\forall x \in I \backslash \{x_0\}, g'(x) \neq 0.$

Si

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$$

alors

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

Exemple 1.4.5 *Calculer la limite* $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^3-1}{x-1}$

* $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^3-1}{x-1} = \frac{0}{0}(FI)$
* $f(x) = x^3 - 1, f'(x) = 3x^2$
* $g(x) = x - 1, g'(x) = 1 \neq 0$ *sur* $\mathbb{R} \setminus \{1\}$
* $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^3-1}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{3x^2}{1} = 3.$

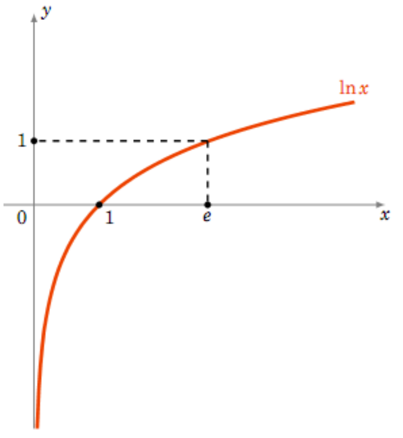
1.5 Fonctions usuelles

1.5.1 Fonction logarithme

Définition 1.5.1 *La fonction notée* $\ln x :]0, +\infty[$ *est appelée logarithme naturel (népérien)*

Propriétés 1.5.1 $\forall a, b > 0$:

1. $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b,$



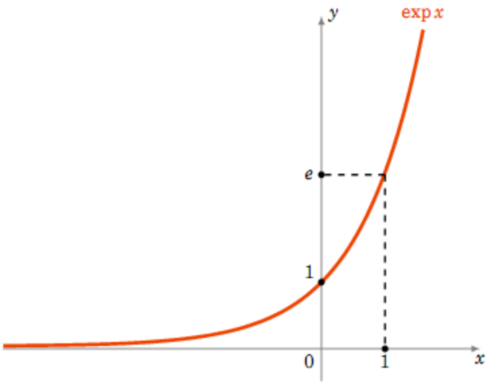
2. $\ln(\frac{1}{a}) = -\ln a$,
3. $\ln(a^n) = n \ln a$, *pour tout* $n \in \mathbb{N}$,
4. $\ln' x = \frac{1}{x}, \forall x \in]0, +\infty[$ *et* $\ln(1) = 0$.
5. $\ln x$ *est une fonction continue, strictement croissante et définit une bijection de* $[0, +\infty[$ *sur* $\mathbb{R}$
6. $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = 0$, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$,
7. *La fonction* $\ln$ *est concave et* $\ln x \leq x + 1$ *(pour tout* $x > 0$*)*.
8. *Le logarithme de base* a *est donné par* $\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$
9. *Pour* $a = 10$*, on obtient le logarithme décimal* $\log_{10}(x)$.

1.5.2 Fonction exponentielle

Définition 1.5.2 *La bijection réciproque de* $\ln :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ *s'appelle la fonction exponentielle, notée* $\exp : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$.

Propriétés 1.5.2 *La fonction exponentielle vérifie les propriétés suivantes :*

1. $\exp(\ln x) = x$ *pour tout* $x > 0$ *et* $\ln(\exp x) = x$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$,
2. $\exp(a + b) = \exp a \times \exp b$,
3. $\exp(nx) = (\exp x)^n$,



4. exp *est une fonction continue, strictement croissante,*
5. $\lim\limits_{x \to -\infty} \exp x = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \exp x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\exp x}{x} = +\infty$,
6. *La fonction exponentielle est dérivable et* $\exp' x = \exp x$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$. *Elle est convexe et* $\exp x \geq 1 + x$.

1.5.3 La fonction puissance

Définition 1.5.3 *Pour* $a > 0$ *et* $x \in \mathbb{R}$, *on définit la fonction puissance (exponentielle) par :*

$$a^x = \exp(x \ln a).$$

Exemple 1.5.1 1. $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}} = \exp(\frac{1}{2} \ln a)$ *(la racine carrée de a),*

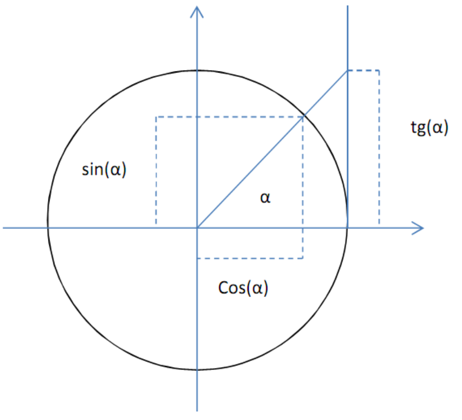
2. $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} = \exp(\frac{1}{n} \ln a)$ *(la racine* $n^{\text{ième}}$ *de a),*

Remarque 1.5.1 1. *On note aussi* $\exp x$ *par* e^x *car* $e^x = \exp(x \ln e) = \exp x$,

2. *Il ne faut jamais confondre les fonctions* $x \to a^x$ *avec* $x \to x^a$.

1.5.4 Fonctions trigonométriques

Définition 1.5.4 *Dans un cercle de rayon* $r = 1$, *les fonctions sinus, cosinus et tangente sont définies comme le rappelle le schéma*



Propriétés 1.5.3 *1.* sin *et* cos *sont de période* 2π*,* tan *est de période* π*.*

2. sin *et* tan *sont impaires,* cos *est paire.*

3. $(\sin)\prime = \cos, \quad (\cos)\prime = -\sin$

4. $(\tan)' = 1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}$.

1.5.5 Fonctions trigonométriques réciproques

Les fonctions $\sin x, \cos x$ et $\tan x$ sont périodiques et continues sur leurs domaines de féfinition. Pour inverser ces fonctions, il est nécéssaire de considérer leurs restrictions à des intervalles où elles sont monotones.

Définition 1.5.5 *1. La restriction de la fonction sinus à* $I = \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *est continue et strictement croissante telle que* $\sin(I) = [-1, 1]$*, elle admet donc une bijection réciproque notée* $\arcsin : [-1, 1] \to I$ *donnée par*

$$\forall x \in [-1, 1], y = \arcsin(x) \Longleftrightarrow y \in I \quad \textit{et} \ \sin y = x$$

2. $\arcsin(x)$ *signifie : "Quel est l'arc dont le sinus est* x*"*

3. arcsin *est continue, strictement croissante sur* $[-1, 1]$ *et impaire.*

4. $(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Définition 1.5.6 *1. La bijection réciproque de la fonction* $\cos x : [0, \pi] \to [-1, 1]$ *notée* $\arccos x : [-1, 1] \to [0, \pi]$ *est donnée par*

$$\forall x \in [-1, 1], y = \arccos(x) \Longleftrightarrow y \in [0, \pi] \quad \textit{et} \ \cos y = x$$

2. arccos *est continue, strictement décroissante sur* $[-1, 1]$ *et paire.*

3. $(\arccos(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Définition 1.5.7 *1. La bijection réciproque de la fonction* $\tan x : \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ *notée* $\arctan x : \mathbb{R} \to \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ *est donnée par*

$$\forall x \in \mathbb{R}, y = \arctan(x) \Longleftrightarrow y \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\quad \textit{et} \ \tan y = x$$

2. $(\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2}$.

1.6 Etude de la fonction y=f(x)

Pour étusier une fonction $y = f(x)$, il faut d'abord déterminer la (où les) intervalle(s) dans le (les) quelle(s) $f(x)$ a un sens, autrement dit "déterminer le domaine de définition de f).

Sans oublier l'étude de la parité et de la périodicité pour économiser l'énergie. Puis, on étudie la continuité en utilisant les combinaisons des fonctions continues.

1.6.1 Etude aux bornes

Bornes finies $x_0 : \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$

- Si A est fini : on peut éventuellement prolonger la fonction en x_0 (seulement à droite ou à gauche si la limite n'existe qu'à droite ou à gauche).
- Si A est infini : **asymptote verticale** $x = x_0$. L'étude de la limite, suivant que $x \to x_0^+$ ou $x \to x_0^-$, renseigne sur l'existence d'une ou de deux branches infinies.

Bornes infinies $\lim_{x \to \infty} f(x) = A$

- Si A est fini : **asymptote horizontale** $y = A$. La position de la courbe par rapport à cette asymptote peut être trouvée en étudiant le signe de $f(x) - A$.
- Si A est infini : branche infinie, séparer éventuellement les cas $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$, puis étudier $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = a$.
  - Si a infini $\Longrightarrow$ **branche parabolique** par rapport à $yy\prime$
  - Si a fini $\Longrightarrow$ direction asymptotique $y = ax$. Etudier alors $\lim_{x \to \infty} f(x) - ax = b$
    - Si b infini $\Longrightarrow$ **branche parabolique de direction par rapport à** $\mathbf{y = ax}$
    - Si b fini $\Longrightarrow$ **asymptote** $\mathbf{y = ax + b}$.

1.6.2 Calcul de $f\prime$

- f est croissante où décroissante selon le signe de f' $(f' > 0 \Longrightarrow f \nearrow, f' < 0 \Longrightarrow f \searrow)$
- f' s'annule et change de signe alors il y a un extremum (min où max)
- $f'(x)$ est la pente de la tangente à la courbe en x_0.

1.6.3 Calcul de f''

- $f'' > 0 \Longrightarrow$ concavité vers les $y > 0$
- $f'' < 0 \Longrightarrow$ concavité vers les $y < 0$
- f'' s'annule et change de signe $\Longrightarrow$ **point d'inflexion** (la courbe traverse sa tangente)

Maintenant, dans un tableau dit de variation, nous allons résumer toutes les informatons obtenues sur la courbe. De plus, on peut chercher d'autres informations (intersections de la courbe avec les axes et avec les asymptotes, ...).

Finalement, c'est le tracé de la courbe (représentation graphique).

CHAPITRE 2

Chapitre 2 : Fonction à plusieurs variables

Dans le chapitre précédent, nous avons étudié les fonctins à une variable. Pratiquement, ces fonctions ne sont pas adaptées à la modélisation des variations des grandeurs qui dépendent de plusieurs variables. Pour cela, il est nécessaire d'introduire dans ce chapitre les fonctions à plusieurs variables.

2.1 Définition d'une fonction à plusieurs variables

Définition 2.1.1 *Une application définie sur un sous ensemble de $\mathbb{R}^n$ et prenant des valeurs réelles est appelée* ***fonction à n variables*** *:*

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}, \forall x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Exemple 2.1.1 *La pression P d'un gaz parfait est une fonction de trois variables, sa température T, son volume V et le nombre de moles N :*

$$P(N, V, T) = \frac{NRT}{V}, R = cte.$$

Définition 2.1.2 *Si l'on fixe à des valeurs constantes toutes les variables d'une fonction à plusieurs variables sauf une, on obtient une fonction à une seule variable, appelée* ***application partielle****.*

Exemple 2.1.2 *Si on fixe le volume V et le nombre des moles N à des valeurs constantes ($V = V_0, N = N_0$), la pression P d'un gaz parfait dépend uniquement d'une seule variable c'est la température T*

$$P(T) = \frac{N_0 RT}{V_0}, R, V_0, N_0 = cte.$$

2.2 Continuité

Définition 2.2.1

- *Une fonction f à n variables est dite continue en $x_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ si et seulement si : $\forall x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ et $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta(\varepsilon)$ tel que :*

$$\left.\begin{array}{l} \left|x - x_1^0\right| < \eta(\varepsilon) \\ \left|x - x_2^0\right| < \eta(\varepsilon) \\ \quad .... \\ \left|x - x_n^0\right| < \eta(\varepsilon) \end{array}\right\} \Longrightarrow \left|f(x_1, x_2, ..., x_n) - f(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)\right| < \varepsilon.$$

- *On écrit* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x_1, x_2, ..., x_n) = f(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$.
- *Si la fonction est continue en chaque point d'un sous ensemble E de $\mathbb{R}^2$ on dit qu'elle est continue sur E.*
- *Si f et g sont deux fonctions à n variables continues en x_0, alors :*
  1. *$f + g$ est continue en x_0*
  2. *$f.g$ est continue en x_0*
  3. *f/g est continue en x_0 si $g(x_0) \neq 0$.*

2.3 Dérivées partielles

2.3.1 Dérivées partielles du premier ordre

Définition 2.3.1 *Soit une fonction f à n variables et l'application partielle obtenue en fixant toutes les variables sauf x_k à des constantes $(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$. La dérivée (si elle existe) de l'application partielle au point x_k^0 définie par :*

$$\lim_{x_k \to x_k^0} \frac{f(x_1^0, x_2^0, ..., x_k, ..., x_n^0) - f(x_1^0, x_2^0, ..., x_k^0, ..., x_n^0)}{x_k - x_k^0}$$

est appelée ***dérivée partielle*** *de f au point $x_0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ notée*

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0).$$

Propriétés 2.3.1
- *Une fonction à n variables admet n dérivées partielles du premier ordre par rapport à $x_1, x_2, ..., x_n$. On note $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ la dérivée partielle de f par rapport à x_k.*
- *Les règles de dérivation des fonctions à une variable s'appliquent aussi aux dérivées partielles. Plus particulièrement on a :*
  1. $\frac{\partial c}{\partial x_k} = 0 \quad \forall k$ *(où $c = cte$)*
  2. $\frac{\partial x_k}{\partial x_k} = 1 \quad \forall k$
  3. $\frac{\partial x_k}{\partial x_l} = 0 \quad \forall (k, l)$ *avec $k \neq l$.*

Exemple 2.3.1 *Trouver les dérivées partielles d'ordre 1 par rapport à T et par rapport à V de la pression P d'un gaz parfait*

$$P(T, N, V) = \frac{NRT}{V}.$$

On calcule la dérivée partielle par rapport à T en considérant N et V comme des constantes :

$$\frac{\partial P}{\partial T} = \frac{NR}{V}.$$

De la même manière on calcule

$$\frac{\partial P}{\partial V} = \frac{-NRT}{V^2}.$$

2.3.2 Dérivées partielles d'ordre supérieur

La dérivée partielle de premier ordre d'une fonction f à n variables est aussi une fonction à n variables. Si les dérivées partielles de $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ par rapport à ces variables existent, ces dérivées sont appelées dérivées partielles de second ordre de la fonction f et sont notées :

1. $\frac{\partial}{\partial x_l}(\frac{\partial f}{\partial x_k}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_l \partial x_k} \quad k \neq l$ (dérivée mixte)
2. $\frac{\partial}{\partial x_k}(\frac{\partial f}{\partial x_k}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}.$

Exemple 2.3.2 *Trouver la dérivée partielle d'ordre* 2 *par rapport à* V *et la dérivée mixte d'ordre* 2 *par rapport à* V *et* T *de la pression* P *d'un gaz parfait. On a calculé* $\frac{\partial P}{\partial V} = \frac{-NRT}{V^2}$ *et* $\frac{\partial P}{\partial T} = \frac{NR}{V}$*. Alors*

1. $\frac{\partial^2 P}{\partial V^2} = \frac{\partial}{\partial V}(\frac{-NRT}{V^2}) = \frac{2NRT}{V^3}.$
2. $\frac{\partial}{\partial T}(\frac{\partial P}{\partial V}) = \frac{-NR}{V^2}$*, ou de manière équivalente* $\frac{\partial}{\partial V}(\frac{\partial P}{\partial T}) = \frac{-NR}{V^2}$*. Donc*

$$\frac{\partial}{\partial T}(\frac{\partial P}{\partial V}) = \frac{\partial}{\partial V}(\frac{\partial P}{\partial T}).$$

Théorème 2.3.1 ***(Schwartz)***

Soit f *une fonction de deux variables* x *et* y*. Si les dérivées partielles mixtes de second ordre existent et sont continues, alors :*

$$\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x}) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y}),$$

et on écrit

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Définition 2.3.2 *On appelle **matrice hessienne** en un point* (x_0, y_0) *d'une* *fonction f à deux variables , la matrice*

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}.$$

2.3.3 Extrema d'une fonction à deux variables

Théorème 2.3.2 *Soit f une fonction à deux variables x et y. Si f admet un extremum local en un point (x_0, y_0) et que f est dérivable par rapport à x et par rapport à y en x_0 et en y_0, alors :*

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0.$$

Propriétés 2.3.2 ***Extremum : minimum ou maximum ?***

On admettra que f est dérivable deux fois. Notons Δ le déterminant de la matrice hessienne :

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2} \end{vmatrix} \\ &= \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} . \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} - (\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y})^2 \\ &= rt - s^2. \end{aligned}$$

1. *Si $\Delta > 0$ et $r = \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2} > 0 \Longrightarrow (x_0, y_0)$ est un minimum.*
2. *Si $\Delta > 0$ et $r = \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2} < 0 \Longrightarrow (x_0, y_0)$ est un maximum.*
3. *Si $\Delta < 0 \Longrightarrow (x_0, y_0)$ est un point selle (pas d'extremum).*
4. *Si $\Delta = 0 \Longrightarrow$ cas indéterminé.*

Exemple 2.3.3 *Trouver les extrema de la fonction $f(x, y) = ax^2+by^2, (a, b) \in \mathbb{R}^2$. On a :*

1. $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2ax = 0 \Longrightarrow x = 0$
2. $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 2by = 0 \Longrightarrow y = 0$

alors $(0,0)$ *est un extremum. (minimum ou maximum ?). On a :*

$$\begin{array}{l} r = \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2} = 2a \\ t = \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2} = 2b \\ s = \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x \partial y} = 0 \end{array}$$

$$\Delta = rt - s^2 = 4ab.$$

D'où :

1. *Si* a *et* b *sont positifs, alors* $r > 0$ *et* $\Delta > 0 \Longrightarrow$ *le point* $(0,0)$ *est un minimum,*
2. *Si* a *et* b *sont négatifs, alors* $r < 0$ *et* $\Delta > 0 \Longrightarrow$ *le point* $(0,0)$ *est un maximum,*
3. *Si* a *et* b *sont de signes contraires, alors* $\Delta < 0 \Longrightarrow$ *il n'existe pas d'extremum.*

2.4 Différentielles

Définition 2.4.1 *On appelle* ***différentielle partielle*** *par rapport à* x_k *d'une fonction* f *à* n *variables, l'expression*

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k.$$

Définition 2.4.2 *On appelle* ***différentielle*** *(en physique* ***différentielle totale*** *ou* ***différentielle exacte****) d'une fonction* f *à* n *variables :*

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i.$$

Théorème 2.4.1 *Pour qu'une fonction* f *à* n *variables soit* ***différentiable*** *en un point* $x_0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$*, il suffit que ses dérivées partielles du premier ordre existent et soient continues en* x_0*. Une telle fonction* f *est appelée* ***régulière****.*

2.5 Calcul d'erreur

Maintenant, en utilisant la différentielle, nous allons déterminer l'erreur maximale d'un résultat de calcul faisant intervenir des paramètres expérimentaux imprécis.

2.5.1 Erreur absolu

Théorème 2.5.1 *Soit f une fonction à n variables, régulière au point $x_0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ avec chaque x_i^0 affecté d'une erreur Δx_i. L'erreur Δf induite par l'imprécision sur les x_i^0 peut être estimée par*

$$|\Delta f| \leq \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \right| \Delta x_i^0$$

Exemple 2.5.1 *Calculer le nombre de moles contenues dans un gaz parfait maintenu dans un récipient qui mesure $1L$ avec une précision de 0.5%, à une pression $P = 1atm$, déterminée avec une précision de 1% et thermostaté à $300K$ par un thermostat pouvant être réglé au $1/10$ de degré près. On donne $R = 0.08205 atm\ L\ mol^{-1} K^{-1}$.*

Le nombre de moles N est donné par

$$\begin{aligned} N &= \frac{PV}{RT} \\ &= \frac{1 \times 1}{0.08205 \times 300} \\ &= 0.0406256 mol. \end{aligned}$$

On calcule la différentielle

$$\begin{aligned} dN &= \frac{\partial N}{\partial P} dP + \frac{\partial N}{\partial V} dV + \frac{\partial N}{\partial T} dT \\ &= \frac{V}{RT} dP + \frac{P}{RT} dV - \frac{PV}{RT^2} dT. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\Delta N &\leq \left|\frac{V}{RT}\right|\Delta P + \left|\frac{P}{RT}\right|\Delta V + \left|-\frac{PV}{RT^2}\right|\Delta T \\
&\leq 0.0406256 \times 0.01 + 0.0406256 \times 0.005 \\
&\quad +0.000135419 \times 0.1 \\
&\leq 0.000622926 mol.
\end{aligned}$$

On écrit

$$N = (0.0406 \pm 0.0006) mol.$$

La précision est d'environ 1.5%.

2.5.2 Erreur relative et différentielle logarithmique

Le calcul de l'erreur relative $\frac{\Delta f}{f}$ est obtenu facilement par le calcul de la différentielle logarithmique

$$d \ln|f| = \frac{df}{f}.$$

Exemple 2.5.2 *Revenant à l'exemple 2.5.1. Nous allons refaire le calcule en utilisant la différentielle logarithmique*

$$\begin{aligned}
\ln N &= \ln \frac{PV}{RT} \\
&= \ln P + \ln V - \ln R - \ln T.
\end{aligned}$$

Alors

$$d(\ln N) = \frac{dP}{P} + \frac{dV}{V} - \frac{dT}{T}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta N}{N} &= \left|\frac{1}{P}\right|\Delta P + \left|\frac{1}{V}\right|\Delta V + \left|-\frac{1}{T}\right|\Delta T \\
&= 0.01 + 0.005 + \frac{0.1}{300} \\
&= 0.015 \\
&= 1.5\%
\end{aligned}$$

On remarque qu'on a trouvé le même résultat, mais avec un moyen plus simple.

CHAPITRE 3

Chapitre 3 : Calcul intégral et équations différentielles

3.1 Calcul intégral et primitives

L'intégrale d'une fonction f continue sur $[a,b]$ mesure l'air de la portion du plan comprise entre la courbe $y = f(x)$, l'axe des x et les droites $x = a$, $x = b$ et notée $\int_a^b f(x)dx$. (voir FIG 3.1)

Théorème 3.1.1 *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue alors f est intégrable.*

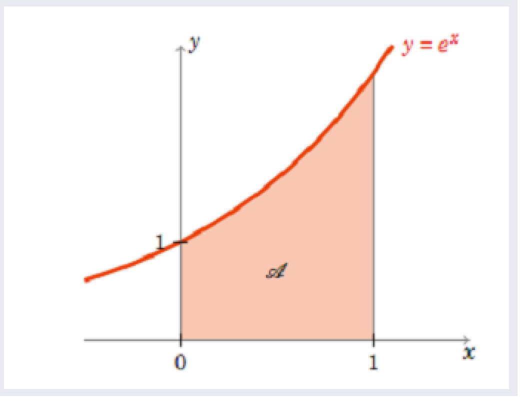
3.1.1 Propriétés de l'intégrale

Les trois principales propriétés de l'intégrale sont la relation de Chasles, la positivité et la linéarité.

Relation de Chasles

Propriétés 3.1.1 *Soient $a < c < b$. Si f est intégrable sur $[a,c]$ et $[c,b]$, alors f est intégrable sur $[a,b]$. Et on a*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$



Remarque 3.1.1 *On a :*

1. $\int_a^a f(x)dx = 0,$
2. *Pour* $a < b$, $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$

Positivité de l'intégrale

Propriétés 3.1.2 *Soit $a \leq b$ deux réels et f et g deux fonctions intégrables sur $[a, b]$. Si $f \leq g$ alors*

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

En particulier, si $f \geq 0$ alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0.$

Linéarité de l'intégrale

Propriétés 3.1.3 *Soient f et g deux fonctions intégrables sur $[a, b]$.*

1. *$f + g$ est une fonction intégrable et* $\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$

2. *Pour tout réel* λ, λf *est intégrable et on a* $\int\limits_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int\limits_a^b f(x)dx$.

   Par ces deux premiers points nous avons ***la linéarité de l'intégrale*** *: pour tous réels* λ *et* μ

$$\int\limits_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))dx = \lambda \int\limits_a^b f(x)dx + \mu \int\limits_a^b g(x)dx.$$

3. $f \times g$ *est une fonction intégrable sur* $[a, b]$ *mais en général* $\int\limits_a^b (fg)(x)dx \neq (\int\limits_a^b f(x)dx)(\int\limits_a^b g(x)dx)$.
4. $|f|$ *est une fonction intégrable sur* $[a, b]$ *et* $\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \leq \int\limits_a^b |f(x)|\, dx$.
5. *Si* f *est paire et* $[-\alpha, \alpha] \subset [a, b]$ *alors*

$$\int\limits_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 2\int\limits_0^{\alpha} f(x)dx.$$

6. *Si* f *est impaire alors* $\int\limits_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 0$.

3.1.2 Primitive d'une fonction

Définition 3.1.1 *Soit* $f : I \to \mathbb{R}$ *une fonction définie sur un intervalle quelconque* I *de* $\mathbb{R}$. *On dit que* $F : I \to \mathbb{R}$ *est une primitive de* f *sur* I *si* F *est une fonction dérivable sur* I *vérifiant* $F'(x) = f(x)$ *pour tout* $x \in I$.

Propriétés 3.1.4 *Soit* $f : I \to \mathbb{R}$ *une fonction et soit* $F : I \to \mathbb{R}$ *une primitive de* f. *Toute primitive de* f *s'écrit* $G = F + c$ *où* $c \in \mathbb{R}$.

3.1.3 Primitives des fonctions usuelles

$$\begin{aligned}
\int x^\alpha dx &= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \alpha \in \mathbb{R}\backslash\{-1\} \\
\int e^x dx &= e^x + c \\
\int \frac{1}{x} dx &= \ln|x| + c \\
\int \cos x dx &= \sin x + c \\
\int \sin x dx &= -\cos x + c \\
\int \frac{dx}{x+a} &= \ln|x+a| + c \\
\int \frac{dx}{1-x^2} &= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + c
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{1+x^2} &= \arctan x + c \\
\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \left\{ \begin{array}{c} \arcsin x + c \\ \frac{\pi}{2} - \arccos x + c \end{array} \right. \quad sur \ \ ]-1,1[\\
\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} &= \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + c. \\
\int \tan x dx &= -\ln|\cos x| + c
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int u(x)u'(x)dx &= \frac{1}{2}u^2(x)+c\\
\int u^\alpha(x)u'(x)dx &= \frac{1}{\alpha+1}u^{\alpha+1}(x)+c\\
\int \frac{u'(x)}{u(x)}dx &= \ln|u(x)|+c\\
\int \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}dx &= \sqrt{u(x)}+c
\end{aligned}$$

3.1.4 Intégrale définies

Définition 3.1.2 *Si f est une fonction continue sur $I([a,b]\subset I)$ et F est une primitive de f sur I,* ***l'intégrale définie*** *de f entre les bornes d'intégration a et b est donnée par :*

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b F'(t)dt = [F(t)]_a^b = F(b)-F(a).$$

Exemple 3.1.1 *1. Pour $f(x)=e^x$, une primitive de f est e^x. Donc*

$$\int_0^1 e^x dx = [e^x]_0^1 = e^1 - e^0 = e-1.$$

2. Pour $f(x)=x^2$, une primitive de f est $\frac{x^3}{3}$. Donc

$$\int_0^1 x^2dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

3. $\int_a^x \cos t dt = [\sin t]_{t=a}^{t=x} = \sin x - \sin a$ est une primitive de $\cos t$.

3.1.5 Méthodes d'intégration

A\Changement de variable

Soient $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $u : [\alpha, \beta] \to [a,b]$ une fonction de dérivée continue et strictement monotone avec

$$\begin{cases} u(\alpha) = a \\ u(\beta) = b. \end{cases}$$

En effectuant dans l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ le changement de variable $x = u(t)$. Alors

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[u(t)]u'(t)dt.$$

Exemple 3.1.2 *1. Calcul de* $\int \frac{dx}{x^2+a^2}$.

On a $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{\frac{x^2}{a^2}+1} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1}$,

on pose $t = \frac{x}{a}$, *alors* $x = at$ *et* $dx = d(at) = adt$, *donc*

$$\frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1} = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{(t)^2+1} = \frac{1}{a}\arctan(t) + c = \frac{1}{a}\arctan(\frac{x}{a}) + c.$$

2. Calcul de $\int_0^{1/2} \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}dx$.

Soit le changement de variable $u = 1 - x^2$, *donc* $du = -2xdx$.

Pour $x = 0, u = 1$ *et pour* $x = 1/2, u = 3/4$, *alors*

$$\int_0^{1/2} \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}dx = \int_1^{3/4} \frac{\frac{-du}{2}}{(u)^{3/2}} = -\frac{1}{2}\int_1^{3/4} u^{-\frac{3}{2}}du = \left[u^{-\frac{1}{2}}\right]_1^{3/4} = \frac{2}{\sqrt{3}} - 1.$$

B\ Intégration par partie

Théorème 3.1.2 *Soit u et v deux fonctions de classe C^1 sur un intervalle $[a,b]$.*

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [uv]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx.$$

Exemple 3.1.3 *Pour calculer $\int_0^1 xe^x dx$, on pose $u(x) = x$ et $v'(x) = e^x$. Nous aurons besoin de savoir que $u'(x) = 1$ et qu'une primitive de $v'(x)$ est e^x. Alors la formule d'intégration par partie donne :*

$$\begin{aligned}
\int_0^1 xe^x dx &= \int_0^1 u(x)v'(x)dx \\
&= [u(x)v(x)]_0^1 - \int_0^1 u'(x)v(x)dx \\
&= [xe^x]_0^1 - \int_0^1 1.e^x dx \\
&= (1.e^1 - 0.e^0) - [e^x]_0^1 \\
&= e - (e^1 - e^0) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Exemple 3.1.4 *Calcul de $\int_1^e x \ln x dx$.*

On pose $u(x) = \ln x$ *et* $v'(x) = x$, *donc* $u'(x) = \frac{1}{x}$ *et* $v(x) = \frac{1}{2}x^2$. *Alors*

$$\begin{aligned}
\int_1^e x \ln x dx &= \int_1^e u(x)v'(x)dx \\
&= [u(x)v(x)]_1^e - \int_1^e u'(x)v(x)dx \\
&= \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2}.\frac{1}{x}dx \\
&= (\frac{e^2}{2}.\ln e - \frac{e^1}{2}\ln 1) - \frac{1}{2}\int_1^e xdx \\
&= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^e \\
&= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}(\frac{e^2}{2} - \frac{1^2}{2}) \\
&= \frac{e^2+1}{4}.
\end{aligned}$$

3.1.6 Intégrale généralisées

Le résultat suivant est une extension de la définition de l'intégrale définie $\int_a^b f(t)dt$ au cas où b tend vers $+\infty$ (et/ou a tend vers $-\infty$).

Définition 3.1.3 *Soit f une fonction continue* $\forall x > a$,

1. *Si* $\lim\limits_{X\to+\infty} \int_a^X f(x)dx$ *admet une limite finie* l, *cette intégrale généralisée a donc un sens : on dit qu'elle converge. On pose*

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = l.$$

2. *Si* $\lim\limits_{X\to+\infty} \int_a^X f(x)dx$ *n'a pas de limite finie, alors* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *diverge.*

Exemple 3.1.5

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}dx = ?$$

Nous étudions d'abord l'intégrale

$$\int_0^X e^{-x}dx = \left[-e^{-x}\right]_0^X = -e^{-X} + 1.$$

Passons à la limite

$$\lim_{X\to+\infty} \int_0^X e^{-x}dx = \lim_{X\to+\infty} (-e^{-X} + 1) = 1.$$

Cette limite existe, donc l'intégrale converge

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}dx = 1.$$

Exemple 3.1.6

$$\int_0^{\infty} e^{x}dx = ?$$

Etudions

$$\int_0^X e^{x}dx = [e^{x}]_0^X = e^{X} + 1.$$

La limite

$$\lim_{X\to+\infty} \int_0^X e^{x}dx = \lim_{X\to+\infty} (e^{X} + 1) = +\infty.$$

Donc l'intégrale diverge.

3.2 Equations différentielles

3.2.1 Introduction (Equation de Malthus)

Dans l'exemple suivant x désigne le nombre d'individus de la population étudiée (population humaine, population bactérienne,...). On considère x comme un réel. L'hypothèse de base est que si $x(t)$ est la population à l'instant t, la population à l'instant $t + \Delta t$ où Δt est très petit, vaut

$$\begin{cases} x(t+\Delta t) = x(t) + kx(t)\Delta t \\ k = cte > 0. \end{cases}$$

Divisant par Δt et passant à la limite quand $\Delta t \to 0$ on obtient l'équation différentielle du premier ordre

$$x'(t) = kx(t)$$

où $x'(t)$ est la dérivée par rapport à t.

Définition 3.2.1 *1. On appelle équation différentielle du premier ordre l'équation du type*

$$F(x, y, y') = 0 \tag{3.1}$$

où y est une fonction inconnue. Résoudre l'équation différentielle (3.1) consiste à chercher toutes les fonctions y dérivables en x vérifiant cette équation.

2. On appelle solution sur $I \subset \mathbb{R}$ de l'équation (3.1) toute fonction $y : I \to \mathbb{R}, x \to y(x)$ telle que
   - *y est dérivable sur I*
   - *$\forall x \in I, F(x, y(x), y'(x)) = 0$.*

Exemple 3.2.1 *Soit l'équation* $\begin{cases} y' = ky \\ k \neq 0 \end{cases}$, *y est une fonction de x.*

$$y' = y'(x) = \frac{dy}{dx} = ky(x)$$

$$\Longrightarrow \frac{dy}{y} = kdx, y \neq 0$$

$$\Longrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int kdx$$

$$\Longrightarrow \ln|y| + c_1 = kx + c_2$$

$$\Longrightarrow \ln|y| = kx + c, c = c_1 + c_2$$

$$\Longrightarrow y = e^{kx+c} = \lambda e^{kx}, \lambda = e^c = cte$$

Théorème 3.2.1 ***Existence et unicité d'une solution satisfaisant une condition initiale.***

Soit l'équation différentielle

$$\begin{cases} F(x,y,y') = 0 \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \tag{3.2}$$

Il existe une solution unique y de l'équation différentielle (3.2) telle que la condition initiale $y(x_0) = y_0$ est vérifiée.

Exemple 3.2.2 *Soit l'équation différentielle*

$$\begin{cases} y' = ky \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

La solution de cette équation est $y = \lambda.e^{kx}$ *et on a* $y(0) = 2$ *alors*

$$y(0) = \lambda e^{k.0} = \lambda = 2$$

donc la solution qui vérifiée la condition initiale $y(0) = 2$ *est donnée par*

$$y = 2.e^{kx}.$$

3.2.2 Equation différentielle linéaire du premier ordre sans second membre

Définition 3.2.2 *Toute équation différentielle de la forme*

$$y' = f(x)y$$

est appelée équation différentielle linéaire du premier ordre sans second membre.

Résolution d'une équation linéaire du premier ordre sans second membre

$$\begin{aligned} y' &= f(x)y \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = f(x)y \\ &\Longrightarrow \frac{dy}{y} = f(x)dx \\ &\Longrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int f(x)dx \\ &\Longrightarrow \ln|y| = \int f(x)dx + c \\ &\Longrightarrow y = e^{\int f(x)dx+c} \\ &\Longrightarrow y = \lambda e^{\int f(x)dx} \quad \text{où} \quad \lambda = e^c. \end{aligned}$$

Exemple 3.2.3 *Résoudre l'équation $y' - xy = 0$.*

$$\begin{aligned} y' - xy &= 0 \Longrightarrow y' = xy \\ &\Longrightarrow \frac{dy}{dx} = xy \\ &\Longrightarrow \frac{dy}{y} = xdx \\ &\Longrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int xdx \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\ln|y| &= \frac{1}{2}x^2 + c \Longrightarrow y = e^{\frac{1}{2}x^2+c} \\ &\Longrightarrow y = e^{\frac{1}{2}x^2}.e^c \\ &\Longrightarrow y = \lambda e^{\frac{1}{2}x^2}, \lambda = \pm e^c.\end{aligned}$$

3.2.3 Equation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre

Définition 3.2.3 *Toute équation différentielle de la forme*

$$y' = f(x)y + g(x) \tag{3.3}$$

est appelée équation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre.

Théorème 3.2.2 *La solution générale (SGEASM) de l'équation (3.3) est donnée par*

$$y = y_0 + Y$$

où y_0 est la solution générale de l'équation sans le second membre ($y' = f(x)y$) (SGESSM) et Y est la solution particulière de l'équation $y' = f(x)y + g(x)$. (SPEASM)

Résolution de l'équation par la méthode de variation de la constante

La solution générale de l'équation (3.3) sans second membre $y' = f(x)y$ est

$$y_0 = \lambda e^{F(x)} \qquad \text{avec} \quad F(x) = \int f(x)dx.$$

Posons

$$y = SGEASM = \lambda(x)e^{F(x)},$$

alors

$$\begin{aligned} y' &= \lambda'(x)e^{F(x)} + \lambda(x)f(x)e^{F(x)} \\ &= f(x)\lambda(x)e^{F(x)} + g(x). \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \lambda'(x)e^{F(x)} &= g(x) \Longrightarrow \lambda'(x) = \frac{g(x)}{e^{F(x)}} = g(x)e^{-F(x)} \\ &\Longrightarrow \lambda(x) = \int g(x)e^{-F(x)}dx + \beta. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} y &= [\int g(x)e^{-F(x)}dx + \beta]e^{F(x)} \\ & \underbrace{\beta e^{F(x)}}_{y_0} + \underbrace{e^{F(x)} \int g(x)e^{-F(x)}dx.}_{Y} \end{aligned}$$

Exemple 3.2.4 *Soit l'équation linéaire du premier ordre avec second membre $y' = -y + x^2$ avec $f(x) = -1$ et $g(x) = x^2$. On résoud d'abord l'équation sans second membre $y' = -y$. Alors*

$$y_0 = SGESSM = \lambda e^{\int f(x)dx} = \lambda e^{-x}.$$

D'où

$$y = SGEASM = \lambda(x)e^{-x} \Longleftrightarrow y' = \lambda'(x)e^{-x} - \lambda(x)e^{-x}$$

$$y' + y = \lambda'(x)e^{-x} \underbrace{-\lambda(x)e^{-x} + \lambda(x)e^{-x}}_{0} = g(x) = x^2$$

$$\Longleftrightarrow \lambda'(x) = \frac{x^2}{e^{-x}} \Longrightarrow \lambda(x) = \int x^2 e^x dx.$$

A l'aide de deux intégrations par parties on obtient

$$\lambda(x) = e^x(x^2 - 2x + 2) + K \quad où \quad K \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} y &= SGEASM \\ &= [e^x(x^2-2x+2)+K]e^{-x} \\ &= \underbrace{x^2-2x+2}_{Y}+\underbrace{Ke^{-x}}_{y_0}. \end{aligned}$$

3.2.4 Exemples d'autres équations différentielles (non linéaires)

A\ Equations à variables séparables

Définition 3.2.4 *On appelle équation différentielle du premier ordre toute relation de la forme*

$$b(y)y' - a(x) = 0$$

La séparation des variables passe par

$$b(y)\frac{dy}{dx} = a(x).$$

D'où

$$a(x)dx = b(y)dy.$$

La résolution La solution s'obtient par intégration de chaque membre :

$$\int a(x)dx = \int b(y)dy.$$

Exemple 3.2.5 *voir l'exemple* $y' = ky$.

Exemple 3.2.6 *Soit l'équation* $(1+x)y' = (1+y^2)$.

$$\begin{aligned} (1+x)y' &= (1+y^2) \Longleftrightarrow (1+x)\frac{dy}{dx} = (1+y^2) \\ &\Longleftrightarrow \frac{dy}{(1+y^2)} = \frac{dx}{(1+x)}, x \neq -1 \\ &\Longleftrightarrow \int \frac{dy}{(1+y^2)} = \int \frac{dx}{(1+x)} \\ &\Longleftrightarrow \arctan(y) = \ln|1+x| + c \\ &\Longleftrightarrow y = \tan(\ln|1+x| + c), c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

B\ Equation de Bernoulli

Une équation différentielle est dite de Bernoulli si elle est de la forme :

$$\begin{cases} y' = f(x)y + g(x)y^{\alpha} \\ \alpha \neq 0, \alpha \neq 1 \text{ et } \alpha \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{3.4}$$

La résolution On a

$$y' = f(x)y + g(x)y^{\alpha} \Longleftrightarrow \frac{y'}{y^{\alpha}} = f(x)\frac{y}{y^{\alpha}} + g(x) = f(x)z + g(x).$$

On effectue le changement de variable $z = \frac{y}{y^{\alpha}} = y^{1-\alpha}$, donc

$$\begin{aligned} z' &= (1-\alpha)y^{1-\alpha-1}y' \Longleftrightarrow z' = (1-\alpha)\frac{y'}{y^{\alpha}} \\ &\Longleftrightarrow \frac{z'}{(1-\alpha)} = \frac{y'}{y^{\alpha}} \\ &\Longleftrightarrow \frac{z'}{(1-\alpha)} = f(x)z + g(x) \\ &\Longleftrightarrow z' = (1-\alpha)f(x)z + (1-\alpha)g(x) \\ &\Longleftrightarrow z' = F(x)z + G(x) \end{aligned}$$

c'est une équation différentielle du premier ordre avec second membre que l'on sait résoudre.

Exemple 3.2.7 *Résoudre l'équation*

$$xy' + y - xy^3 = 0, x \neq 0.$$

$$xy' = -y + xy^3 \Longleftrightarrow y' = -\frac{y}{x} + y^3$$

c'est une équation de Bernoulli avec

$$f(x) = -\frac{y}{x}, g(x) = 1 \text{ et } \alpha = 3$$

$$\begin{aligned}\frac{y'}{y^3} &= -\frac{1}{x}\frac{y}{y^3}+1 \Longleftrightarrow \frac{y'}{y^3} = -\frac{1}{x}\frac{1}{y^2}+1\\ &\Longleftrightarrow \frac{y'}{y^3} = -\frac{1}{x}\underbrace{y^{-2}}_{z}+1.\end{aligned}$$

On a $z = y^{-2}$ *alors*

$$\begin{aligned}z' &= -2y^{-3}y' \Longleftrightarrow \frac{y'}{y^3} = -\frac{1}{2}z'\\ &\Longleftrightarrow -\frac{1}{2}z' = -\frac{1}{x}z+1\\ &\Longleftrightarrow z' = \frac{2}{x}z-2\end{aligned}$$

c'est une équation linéaire du premier ordre avec second ordre dont la solution est

$$z = cx^2-2x \Longrightarrow y(x) = \frac{\pm 1}{\sqrt{cx^2-2x}}.$$

3.2.5 Equations différentielles du second ordre

Définition 3.2.5 *On appelle équation différentielle du second ordre toute relation de la forme :*

$$\forall x, F(x,y,y',y'') = 0$$

entre la variable x*, la fonction* y*, sa dérivée première* y' *et sa dérivée seconde* y''*.*

A\ Equations différentielles du second ordre pouvant se ramener au premier ordre

Propriétés 3.2.1 *Toute relation de la forme*

$$\forall x, F(x,y',y'') = 0$$

c'est-à-dire sans y*, peut se ramener à deux équations différentielles de premier ordre.*

En effet, en posant $z = y'$ et $z' = y''$, la relation devient :

$$F(x, z, z') = 0.$$

Exemple 3.2.8 *Résoudre*

$$y'' + y' = 0.$$

En posant $z = y'$, l'équation devient :

$$z' + z = 0.$$

D'où

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dx} &= -z \Longleftrightarrow \frac{dz}{z} = -dx \\ &\Longleftrightarrow \int \frac{dz}{z} = -\int dx \\ &\Longleftrightarrow \ln|z| = -x + c_1 \\ &\Longleftrightarrow z = c_2 e^{-x}, c_2 = e^{c_1}. \end{aligned}$$

Or

$$y = \int z(x)dx = c_3 e^{-x} + c_4.$$

B\ Equations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants sans second membre

Définition 3.2.6 *Une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants sans second membre est définie par l'équation*

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{3.5}$$

où $a(\neq 0), b$ et c sont des constantes réelles et y une fonction de x.

Définition 3.2.7 *Soient y_1 et y_2 deux fonctions dérivables. On appelle* ***Wrons-***

kien *la fonction* $W(y_1, y_2)$ *associée à* y_1 *et* y_2 *par :*

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2.$$

Propriétés 3.2.2 *Si* y_1 *et* y_2 *sont deux solutions de l'équation (3.5), et que le Wronskien est non nul, alors* y_1 *et* y_2 *sont deux solutions linéairement indépendantes (c'est-à-dire non proportionnelles)* $(y_1 \neq k y_2)$.

Propriétés 3.2.3 *Si* y_1 *et* y_2 *sont deux solutions linéairement indépendantes de l'équation (3.5), l'ensemble des solutions du système est donné par*

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

où c_1 *et* c_2 *sont deux constantes réelles.*

La résolution Vérifions que les solutions y_1 et y_2 sont de la forme $y = e^{rx}$. On en déduit

$$y' = re^{rx}, y'' = r^2 e^{rx}.$$

En les substituant dans l'équation (3.5), on obtient

$$ar^2 e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = (ar^2 + br + c)e^{rx} = 0.$$

Or, $e^{rx} \neq 0$. D'où **l'équation caractéristique**

$$ar^2 + br + c = 0.$$

Les solutions y_1 et y_2 dépendent des racines de cette équation caractéristique. D'où le calcul du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

Premier cas $\Delta > 0$: Alors l'équation caractéristique a deux racines $r_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $r_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et la solution générale de (3.5) est

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}.$$

Deuxième cas $\Delta = 0$: Alors l'équation caractéristique a une racine double $r = \frac{-b}{2a}$ et

$$y = (c_1 + c_2 x)e^{rx}.$$

Troisième cas $\Delta < 0$: Alors $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ et la solution de l'équation (3.5) est

$$y = [c_1 \sin(\beta x) + c_2 \cos(\beta x)]e^{\alpha x}.$$

Exemple 3.2.9 *Résoudre l'équation différentielle*

$$y'' + 4y' = 0. \tag{3.6}$$

L'équation caractéristique

$$\begin{aligned} r^2 + 4r &= 0 \Longleftrightarrow r(r+4) = 0 \\ &\Longleftrightarrow r_1 = -4 \ et \ \ r_2 = 0 \end{aligned}$$

deux racines distinctes donc

$$y = c_1 e^{-4x} + c_2.$$

L'équation (3.6) peut aussi être résolue par le changement de variables : $z = y'$.

Exemple 3.2.10 *Résoudre l'équation différentielle*

$$y'' + 2y' + y = 0.$$

L'équation caractéristique

$$\begin{aligned} r^2 + 2r + 1 &= 0 \Longleftrightarrow (r+1)^2 = 0 \\ &\Longleftrightarrow r = -1 \end{aligned}$$

une racine double donc

$$y = (c_1 + c_2 x)e^{-x}.$$

Exemple 3.2.11 *Résoudre l'équation*

$$2y'' + 2y' + y = 0.$$

L'équation caractéristique : $2r^2 + 2r + 1 = 0$

$$\Delta = -4 = 4i^2 \Longleftrightarrow r = \frac{-2 \pm 2i}{4} = \frac{-1 \pm i}{2}$$

donc (avec $\alpha = -\frac{1}{2}$ *et* $\beta = \frac{1}{2}$*)*

$$y = [c_1 \sin(\frac{x}{2}) + c_2 \cos(\frac{x}{2})]e^{-\frac{x}{2}}.$$

C\ Equations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants avec second membre

Définition 3.2.8 *Une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants avec second membre est une équation de la forme :*

$$ay'' + by' + cy = g(x)$$

où a, b *et* c *sont des constantes et* $g(x)$ *est le second ordre.*

La résolution par la méthode de variation de la constante La forme de la solution sans second membre

$$y_0(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

on déduit la forme de la solution générale avec second membre en considérant les constantes comme des fonctions de x. Posons

$$y(x) = SGEASM = c_1(x) y_1(x) + c_2(x) y_2(x)$$

où c_1 et c_2 sont désormais deux fonctions de x. Les fonctions c_1 et c_2 sont alors des solutions du système

$$\begin{cases} c_1'y_1 + c_2'y_2 = 0 \\ c_1'y_1' + c_2'y_2' = \frac{g(x)}{a} \end{cases}.$$

Le déterminant de ce système est le Wronskien qui est non nul (y_1 et y_2 sont deux solutions linéairement indépendantes). D'après Cramer, la solution est unique :

$$\begin{cases} c_1' = \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ g(x)/a & y_2' \end{vmatrix}}{W(y_1,y_2)} = \frac{-1}{a}\frac{y_2 g(x)}{W(y_1,y_2)} \\ c_2' = \dfrac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & g(x)/a \end{vmatrix}}{W(y_1,y_2)} = \frac{1}{a}\frac{y_1 g(x)}{W(y_1,y_2)} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{-1}{a}\int \frac{y_2 g(x)}{W(y_1,y_2)}dx \\ c_2 = \frac{1}{a}\int \frac{y_1 g(x)}{W(y_1,y_2)}dx \end{cases}.$$

Exemple 3.2.12 *Résoudre l'équation différentielle linéaire du second ordre avec second membre*

$$y'' - 5y' + 6y = e^x.$$

– *Recherche la SGESSM :* y_0 *de l'équation*

$$y'' - 5y' + 6y = 0.$$

L'équation caractéristique :

$$r^2 - 5r + 6 = 0 \Longleftrightarrow r_1 = 2, r_2 = 3$$

$$\Longrightarrow y_0 = c_1e^{2x} + c_2e^{3x}, c_{1,2} \in \mathbb{R}.$$

– *Recherche de SGEASM :* y *: En posant* $y = c_1(x)e^{2x} + c_2(x)e^{3x}$ *avec*

$y_1(x) = e^{2x}, y_2(x) = e^{3x}$ *alors*

$$\begin{cases} c_1'y_1 + c_2'y_2 = 0 \\ c_1'y_1' + c_2'y_2' = \frac{g(x)}{a} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} c_1'e^{2x} + c_2'e^{3x} = 0 \\ 2c_1'e^{2x} + 3c_2'e^{3x} = e^x \end{cases}.$$

En utilisant la méthode de Cramer

$$\begin{cases} c_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{3x} \\ e^x & 3e^{3x} \end{vmatrix}}{W(y_1,y_2)} = \frac{-e^{4x}}{e^{5x}} = -e^{-x} \\ c_2' = \frac{\begin{vmatrix} e^{2x} & 0 \\ 2e^{2x} & e^x \end{vmatrix}}{W(y_1,y_2)} = \frac{e^{3x}}{e^{5x}} = e^{-2x} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} c_1 = e^{-x} + k_1 \\ c_2 = -\frac{1}{2}e^{-2x} + k_2 \end{cases}.$$

Alors

$$\begin{aligned} y &= (e^{-x} + k_1)e^{2x} + (-\frac{1}{2}e^{-2x} + k_2)e^{3x} \\ &= \underbrace{k_1e^{2x} + k_2e^{3x}}_{y_0} + \underbrace{\frac{e^x}{2}}_{Y}. \end{aligned}$$

CHAPITRE 4

Chapitre 4 : Méthodes numériques

Soit la valeur expérimentale d'une grandeur y qui dépend d'une autre grandeur x et que l'on ne connaît pas l'expression analytique de la fonction f qui relie les deux valeurs. Dans ce cas, quel est le moyen utilisé pour le calcul des dérivées, calcul d'intégrales ? Dans ce chapitre, afin de répondre à cette question, nous allons introduire **les méthodes numériques**.

4.1 La courbe expérimentale et l'interpolation graphique

Lors d'une expérience, on obtient des résultats expérimentaux présentés sous la forme d'un tableau dit de **correspondance**.

Exemple 4.1.1 *Soient les résultats expérimentaux donnés sous forme d'un tableau :*

t (min)	1	5	10	15	17	20	30	40
$C(t)$ *(mg/l)*	24.5	10.30	8.50	7.8	7.70	7.45	7.30	7.25

Ces résultats sont représentés graphiquement par : Fig (4.1)

1. *La grandeur C portée sur l'axe des ordonnées est appelée* ***variable à expliquer****, elle varie en fonction de t portée sur l'axe des abscisses qui*

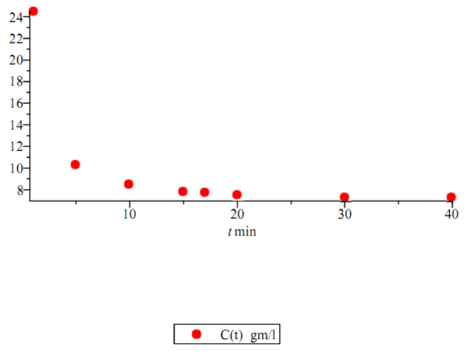


FIG. 4.1 – Evolution de C(t) en fonction de t

est appelée ***variable explicative.***

2. *Par un tracé continu passant par tous les points expérimentaux, on obtient une* ***courbe*** *dite* ***expérimentale.***
3. *La lecture sur la courbe expérimentale nous permet de déduire une interpolation graphique des données non mesurées sans connaitre l'expression de* C :
   - *Quelle est la concentration au temps* $t = 7\,\text{min}$? *graphiquement, elle est entre* 8 *et* $9mg/L$.
   - *A quel instant la concentration est-elle de* $15mg/L$? *graphiquement il est entre* 3 *et* $4\,\text{min}$.

4.2 Calcul approché de dérivées

Nous allons donner dans cette section quelques résultats utilisés pour le calcul approché de la dérivée sans connaitre l'expression analytique de la fonction f. Ces résultats découlent de la définition de la dérivée d'une fonction en un point comme étant la pente de la tangente en ce point.

Définition 4.2.1 *Si la fonction* f *est mesurée expérimentalement en deux points :* a *et* $a + h$ *où* h *est petit, alors la valeur approchée de la dérivée*

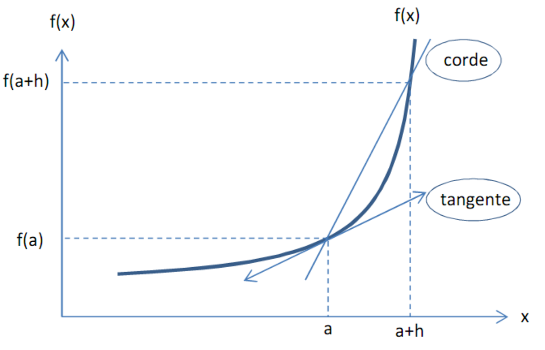


FIG. 4.2 – Valeur approchée de la dérivée

première $f'(a)$ est donnée par

$$\boxed{\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}$$

Définition 4.2.2 *Si la fonction f est mesurée expérimentalement en deux points : $a-h$ et $a+h$, alors la valeur approchée de la dérivée première $f'(a)$ est donnée par*

$$\boxed{\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}}$$

Définition 4.2.3 *Si la fonction f est mesurée expérimentalement au trois points : $a-h, a$ et $a+h$, alors la valeur approchée de la dérivée seconde $f''(a)$ est donnée par*

$$\boxed{\frac{f(a+h)-2f(a)+f(a-h)}{h^2}}$$

Exemple 4.2.1 *Revenons à l'exemple 4.1.1 :*

- $C'(t) = \frac{C(t+h)-C(t-h)}{2h}$.
- $C'(10) = \frac{C(15)-C(5)}{10} \simeq -0.25mg/L/\min,$ *avec* $h = 5$.
- $C'(20) = \frac{C(30)-C(10)}{20} \simeq -0.06mg/L/\min,$ *avec* $h = 10$.

4.3 Interpolations

Maintenant, nous allons donner une estimation de la fonction f en un point x pour lequel l'expérience n'a pas été réalisée.

4.3.1 Interpolation linéaire

L'interpolation linéaire suppose qu'entre deux points expérimentaux, la variation est linéaire.

Définition 4.3.1 *Si la fonction f est mesurée expérimentalement en deux points a et $a+h$, où h et petit. Alors pour $a < x < a+h, f(x)$ est estimée par :*

$$\boxed{f(a) + (x-a)\tfrac{f(a+h)-f(a)}{h}}$$

Exemple 4.3.1 *(Suite de l'exemple 4.1.1). Estimer $C(7)$ par interpolation linéaire. Pour cela, il suffit de connaître la fonction C en deux points a et $a+h$. Soit $a < t < a+h$,*

$$C(t) \approx C(a) + (t-a)\frac{C(a+h) - C(a)}{h}$$

On a $5 < 7 < 10$, d'où $a = 5$ et $h = 5$

$$C(7) \approx C(5) + (7-5)\frac{C(10) - C(5)}{5} \approx 9.58mg/L.$$

4.3.2 Interpolation parabolique

L'interpolation parabolique suppose qu'entre trois points expérimentaux, la variation est parabolique.

Définition 4.3.2 *La fonction f est mesurée expérimentalement en trois points $a-h, a$ et $a+h$ où h est petit. Si $a-h < x < a+h$, alors f est estimée par*

$$\boxed{f(a) + (x-a)\tfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h} + \tfrac{(x-a)^2}{2}\tfrac{f(a+h)-2f(a)+f(a-h)}{h^2}}$$

Exemple 4.3.2 *Estimer $C(7)$ par interpolation parabolique. Dans ce cas, il suffit de connaître la fonction C en trois points : $a-h, a$ et $a+h$. Soit $a-h<x<a+h$ avec $a=10$ et $h=5$, alors*

$$\begin{aligned} C(7) &\approx C(10)+(7-10)\frac{C(15)-C(5)}{10}+\frac{(7-10)^2}{2}\frac{C(15)-2C(10)+C(5)}{5^2} \\ &\approx 9.45mg/L. \end{aligned}$$

4.4 Calcul approché de l'intégrale

Dans ce paragraphe, nous allons donner quelques méthodes numériques utilisées pour le calcul approché de l'intégrale d'une fonction f continue et définie entre deux bornes a et b : $\int_a^b f(x)dx$. Nous allons appliquer ces méthodes numériques dans le cas où :

- Le calcul de la primitive de f est impossible;
- La fonction f est le résultat de mesures expérimentales en quelques points.

4.4.1 Méthode des rectangles pour deux points

Soit f une fonction mesurée expérimentalement en deux points a et $a+h$. Dans ce cas, f sera approchée par la droite parallèle à l'axe des abscisses d'équation $y=f(a)$. Par conséquent, la surface sous cette droite est un **rectangle** de bases h et $f(a)$ et d'aire $hf(a)$. Donc on a le résultat suivant

$$\boxed{I=\int_a^{a+h} f(t)dt \approx hf(a)}$$

4.4.2 Méthode des rectangles pour (n+1) points régulièrement répartis

Maintenant, la fonction f est la donnée des mesures expérimentales en $(n+1)$ points. Ces points sont régulièrement répartis donnés par $(a=x_0, x_1, x_2, x_3, ..., x_n =$

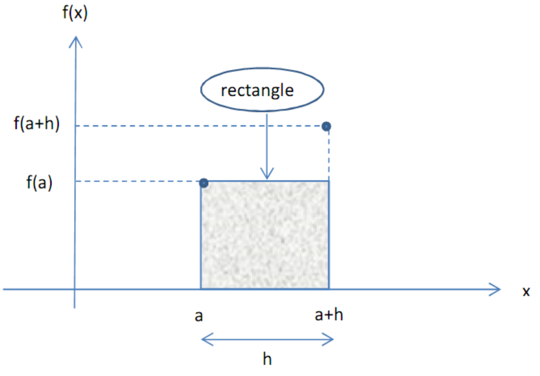


FIG. 4.3 – Méthode des rectangles pour deux points

b), où $x_i = a+ih$. Entre chaque deux points (x_i, x_{i+1}) la fonction f est approchée par une droite parallèle à l'axe des abscisses d'équation $y = f(x_i)$. Sous chaque droite, on obtient un rectangle de bases h et $f(x_i)$. Alors l'intégrale $I = \int_a^b f(t)dt$ est estimée par la somme des aires de ces n rectangles

$$I \approx I_{rectangle} = \underbrace{hf(a)}_{\text{aire du } 1^{er}\text{rectangle}} + hf(x_1) + hf(x_2) + ... + \underbrace{hf(x_{n-1})}_{\text{aire du } n^{ièm}\text{rectangle}}$$

Donc on a le résultat

$$\boxed{I \approx h\{f(a) + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\}}$$

avec $h = \frac{b-a}{n}$.

Remarque 4.4.1 *L'erreur d'estimation est donné par la différence entre la valeur exacte de l'intégrale notée I et la valeur approchée notée $I_{rectangle}$.*

4.4.3 Méthode des trapèzes pour deux points

Considérons la fonction f mesurée expérimentalement en deux points a et $a+h$. Par cette méthode, la fonction f est approximée par une droite, sous cette droite on obtient un **trapèze** d'une petite base $f(a)$, grande base

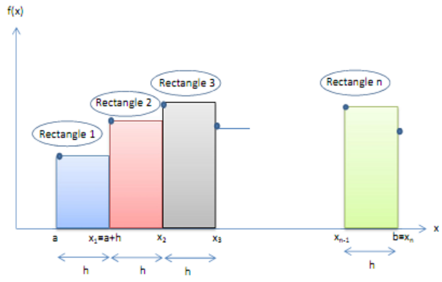


FIG. 4.4 – Méthode des rectangles pour n+1 points

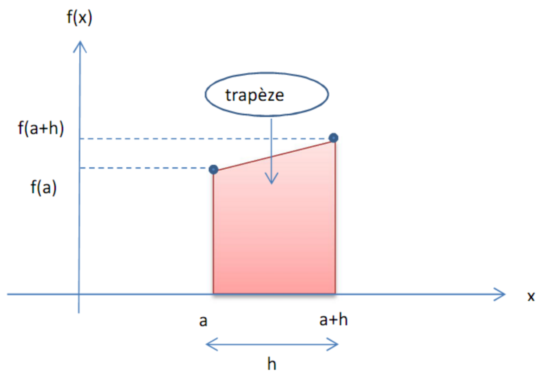


FIG. 4.5 – Méthode des trapèzes pour deux points

$f(a+h)$ et d'un hauteur h. Donc l'intégrale entre a et $a+h$ est estimé par l'aire de ce trapèze. D'où on a

$$\boxed{I = \int_a^{a+h} f(t)dt \approx \frac{h}{2}\{f(a) + f(a+h)\}}$$

4.4.4 Méthode des trapèzes pour (n+1) points régulièrement répartis

La fonction f est mesurée expérimentalement en $(n+1)$ points régulièrement répartis ($a = x_0, x_1, x_2, x_3, ..., x_n = b$). Entre chaque couples de points (x_i, x_{i+1}) on approxime f par une droite. Sous chaque droite on a un trapèze. L'intégrale $I = \int\limits_a^b f(t)dt$ estimé par la somme des aires de n trapèzes.

$$\boxed{I_{trapèzes} = \frac{h}{2}\{f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\}}$$

avec $h = \frac{b-a}{n}$.

Remarque 4.4.2 *L'erreur d'estimation est donné par la différence entre la valeur exacte de l'intégrale notée I et la valeur approchée notée $I_{trapèzes}$.*

4.4.5 Méthode de Simpson pour trois points régulièrement répartis

La fonction f est mesurée expérimentalement en trois points régulièrement répartis $x-h, x$ et $x+h$. Comme on a trois points, on peut approximer la fonction f par un **arc de parabole** d'équation $f(x) = ax^2 + bx + c$, où a, b, c sont à déterminer. Le calcul estimé de l'intégrale $I = \int\limits_{x-h}^{x+h} f(t)dt$ est donné par l'aire sous cette parabole

$$\boxed{I_{\mathrm{Si}mpson} = \frac{h}{3}\{f(x-h) + 4f(x) + f(x-h)\}}$$

4.4.6 Méthode de Simpson pour (n+1) points régulièrement répartis, n pair

La fonction f est mesurée en $(n+1)$ points régulièrement répartis ($a = x_0, x_1, x_2, x_3, ..., x_n = b$) où n est pair et $h = \frac{b-a}{n}$. La généralisation du résultat précédent (pour trois point) nous conduit à estimer l'intégrale $I = \int\limits_a^b f(t)dt$

par

$$\boxed{I_{\mathrm{Si}\,mpson} = \frac{h}{3}\{f(a) + f(b) + 4\sum_{i=0}^{(n-2)/2} f(x_{2i+1}) + 2\sum_{i=1}^{(n-2)/2} f(x_{2i})\}}$$

Remarque 4.4.3 *Pour un même h, la méthode de Simpson est plus précise que la méthode des trapèzes.*

4.5 Résolution d'équations : Méthode de Newton-Raphson

Considérons l'équation $f(r) = 0$. Par fois la recherche de la solution r de cette équation par une méthode analytique est impossible. Pour cette raison, nous allons introduire dans ce paragraphe une méthode numérique (**Newton-Raphson**) qui peut rendre cette recherche est plus facile et qui va nous donner une valeur approchée de cette solution. Pour pouvoir appliquer la méthode de Newton-Raphson, la fonction f doit être **continue**, **monotone** et **dérivable** sur l'intervalle étudié.

La méthode :

- Étape 1 : fixer la précision ε cherchée sur l'approximation de la solution r.
- Étape 2 : mettre l'équation sous la forme $f(x) = 0$
- Étape 3 : calculer $f'(x)$
- Étape 4 : choisir graphiquement un point de départ x_0
- Étape 5 : calculer $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$
- Étape 6 : comparer $|x_1 - x_0|$ à ε :

  1. si $|x_1 - x_0| < \varepsilon$: fin de la procédure $r = x_0 = x_1$
  2. si $|x_1 - x_0| > \varepsilon$: x_1 devient un nouveau point de départ et on calcule $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$, puis on compare $|x_2 - x_1|$ à ε, et on poursuit les itérations en calculant $x_3, ..., x_{n+1}$ jusqu'à ce que $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$.

Remarque 4.5.1 – *L'algorithme de Newton-Raphson coverge si :* $f'(x), f''(x) \neq 0$ *et* $f(x_0)f''(x_0) > 0$

– x_0 *est un choix convenable si* $f'(x_0)f''(x_0) > 0$.

Exemple 4.5.1 *Résoudre l'équation* $\ln(x) = x - 2$ *à* 10^{-3} *près.*

1. *la précision recherchée est* $\varepsilon = 10^{-3}$
2. *mettre l'équation sous la forme* $f(x) = 0$: $f(x) = \ln(x) - x + 2 = 0$.
3. *calculer* $f'(x)$: $f'(x) = \frac{1}{x} - 1$
4. *la courbe* $f(x)$ *coupe l'axe des abscisses en deux points, l'une est proche de* 0 *et l'autre est proche de* 3. *choisissons un point de départ* $x_0 = 3$
5. $x_1 = 3 - \frac{f(3)}{f'(3)} = 3.147918433$
6. $|x_1 - x_0| = 0.147918433 > \varepsilon$, *donc* x_0 *devient un nouveau point de départ*

i	x_i	$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$	$\lvert x_{n+1} - x_n\rvert$	*test*
0	3	$3,147918433$	$0,147918433$	$> \varepsilon$
1	$3,147918433$	$3,146193441$	$0,001724992$	$> \varepsilon$
2	$3,146193441$	$3,146193221$	$2,2.10^{-7}$	$< \varepsilon$

D'où $\boxed{r \approx 3,146}$

7. *Si on prend un point de départ proche de* 0 : $x_0 = 0,1$, *alors on obtient*

i	x_i	$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$	$\lvert x_{n+1} - x_n\rvert$	*test*
0	$0,1$	$0,14473168$	$0,04473168$	$> \varepsilon$
1	$0,14473168$	$0,15786436$	$0,01313268$	$> \varepsilon$
2	$0,15786436$	$0,15859234$	$0,00072799$	$< \varepsilon$

D'où $\boxed{r \approx 0,159}$

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. Bénazth, et als. Biomathématiques, Analyse, Algebre, probabilités, statistiques. Masson, Paris, 2001.