Cours de Biomathématiques-Biostatistiques

$1^{ère}$ année Pharmacie 2020/2021

Dr. M. Hamamda

- Soit la valeur expérimentale d'une grandeur y qui dépend d'une autre grandeur x et que l'on ne connaît pas l'expression analytique de la fonction f qui relie les deux valeurs.

- Soit la valeur expérimentale d'une grandeur y qui dépend d'une autre grandeur x et que l'on ne connaît pas l'expression analytique de la fonction f qui relie les deux valeurs.

- Dans ce cas, quel est le moyen utilisé pour le calcul des dérivées, calcul d'intégrales,...?

- Soit la valeur expérimentale d'une grandeur y qui dépend d'une autre grandeur x et que l'on ne connaît pas l'expression analytique de la fonction f qui relie les deux valeurs.

- Dans ce cas, quel est le moyen utilisé pour le calcul des dérivées, calcul d'intégrales,...?

- Dans ce chapitre, afin de répondre à cette question, nous allons introduire **les méthodes numériques**.

La courbe expérimentale et l'interpolation graphique

Lors d'une expérience, on obtient des résultats expérimentaux présentés sous la forme d'un tableau dit de **correspondance**.

Exemple 1

Soient les résultats expérimentaux donnés sous forme d'un tableau:

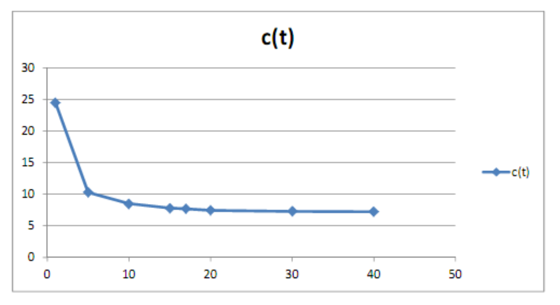
t (min)	1	5	10	15	17	20	30	40
$C(t)$ (mg/l)	24.5	10.30	8.50	7.8	7.70	7.45	7.30	7.25

Ces résultats sont représentés graphiquement par:

La courbe expérimentale et l'interpolation graphique

Ces résultats sont représentés graphiquement par:

Exemple 1



La courbe expérimentale et l'interpolation graphique

Exemple 1

- La grandeur C portée sur l'axe des ordonnées est appelée **variable à expliquer**, elle varie en fonction de t.

La courbe expérimentale et l'interpolation graphique

Exemple 1

- La grandeur C portée sur l'axe des ordonnées est appelée **variable à expliquer**, elle varie en fonction de t.
- La grandeur t portée sur l'axe des abscisses est appelée **variable explicative**.

La courbe expérimentale et l'interpolation graphique

Exemple 1

- La grandeur C portée sur l'axe des ordonnées est appelée **variable à expliquer**, elle varie en fonction de t.
- La grandeur t portée sur l'axe des abscisses est appelée **variable explicative**.
- Par un tracé continu passant par tous les points expérimentaux, on obtient une **courbe** dite **expérimentale**.

La courbe expérimentale et l'interpolation graphique

Exemple 1

- La lecture sur la courbe expérimentale nous permet de déduire une interpolation graphique des données non mesurées sans connaître l'expression de C :

La courbe expérimentale et l'interpolation graphique

Exemple 1

- La lecture sur la courbe expérimentale nous permet de déduire une interpolation graphique des données non mesurées sans connaître l'expression de C :

1. Quelle est la concentration au temps $t = 7\,\mathrm{min}$? graphiquement, elle est entre 8 et $9mg/L$.

La courbe expérimentale et l'interpolation graphique

Exemple 1

- La lecture sur la courbe expérimentale nous permet de déduire une interpolation graphique des données non mesurées sans connaître l'expression de C :

1. Quelle est la concentration au temps $t = 7\,\mathrm{min}$? graphiquement, elle est entre 8 et $9mg/L$.
2. A quel instant la concentration est-elle de $15mg/L$? graphiquement il est entre 3 et $4\,\mathrm{min}$.

Calcul approché de dérivées

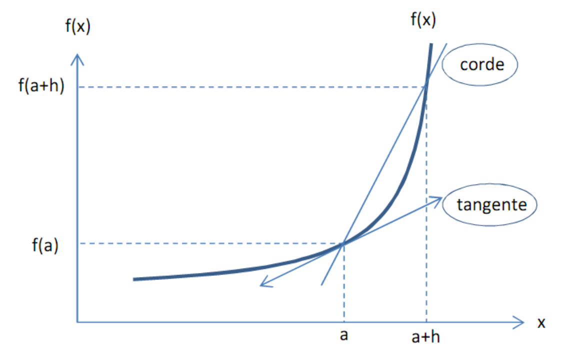
Nous allons donner dans cette section quelque résultats utilisés pour le calcul approché de la dérivée sans connaître l'expression analytique de la fonction f.

Définition

Si la fonction f est mesurée expérimentalement en deux points: a et $a+h$ où h est petit, alors la valeur approchée de la dérivée première $f'(a)$ est donnée par

$$\boxed{\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}$$

Calcul approché de dérivées



Calcul approché de dérivées

Définition

Si la fonction f est mesurée expérimentalement en deux points: $a-h$ et $a+h$, alors la valeur approchée de la dérivée première $f'(a)$ est donnée par

$$\boxed{\boxed{\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}}}$$

Définition

Si la fonction $f$est mesurée expérimentalement au trois points: $a-h, a$ et $a+h$, alors la valeur approchée de la dérivée seconde $f^{''}(a)$ est donnée par

$$\boxed{\boxed{\frac{f(a+h)-2f(a)+f(a-h)}{h^2}}}$$

Calcul approché de dérivées

Suite de l' exemple 1

$$C'(t) = \frac{C(t+h) - C(t-h)}{2h}$$

$$\begin{aligned} C'(10) &= \frac{C(15) - C(5)}{10} \\ &\simeq -0.25mg/L/\min, h = 5. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C'(20) &= \frac{C(30) - C(10)}{20} \\ &\simeq -0.06mg/L/\min, h = 10. \end{aligned}$$

Interpolations

Maintenant, nous allons donner une estimation de la fonction f en un point x pour lequel l'expérience n'a pas été réalisée.

Interpolation linéaire

- L'interpolation linéaire suppose qu'entre deux points expérimentaux, la variation est linéaire.
- Si la fonction f est mesurée expérimentalement en deux points a et $a+h$, où h et petit
- Alors pour $a < x < a+h$:

$$\boxed{f(x) \approx f(a) + (x-a)\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}$$

Interpolations

Suite de l' exemple 1

- Estimer $C(7)$ par interpolation linéaire.
- Pour cela, il suffit de connaître la fonction C en deux points a et $a+h$.
- On a $5 < 7 < 10$, d'où $a = 5$ et $h = 5$

$$C(7) \approx C(5) + (7-5)\frac{C(10) - C(5)}{5} \approx 9.58mg/L.$$

Interpolations

Interpolation parabolique

- L'interpolation parabolique suppose qu'entre trois points expérimentaux, la variation est parabolique.
- La fonction f est mesurée expérimentalement en trois points $a-h, a$ et $a+h$ où h est petit.
- Si $a-h<x<a+h$ alors f est estimée par

$$\boxed{f(a)+(x-a)\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}+\frac{(x-a)^2}{2}\frac{f(a+h)-2f(a)+f(a-h)}{h^2}}$$

Interpolations

Suite de l'exemple 1

- Estimer $C(7)$ par interpolation parabolique.
- Dans ce cas, il suffit de connaître la fonction C en trois points: $a-h, a$ et $a+h$.
- Soit $a-h<x<a+h$ avec $a=10$ et $h=5$, alors

$$C(7) \approx C(10)+(7-10)\frac{C(15)-C(5)}{10}+\frac{(7-10)^2}{2}\frac{C(15)-2C(10)+C(5)}{5^2}$$
$$\approx 9.45mg/L.$$

Calcul approché de l'intégrale

- Nous allons donner quelques méthodes numériques utilisées pour le calcul approché de l'intégrale : $\int_a^b f(x)dx$.
- Nous allons appliquer ces méthodes numériques dans le cas où:
  1. Le calcul de la primitive de f est impossible.
  2. La fonction f est le résultat de mesures expérimentales en quelques point.

Calcul approché de l'intégrale

Méthode des rectangles

Méthode des rectangles pour deux points

- Soit f une fonction mesurée expérimentalement en deux points a et $a+h$.

Calcul approché de l'intégrale

Méthode des rectangles

Méthode des rectangles pour deux points

- Soit f une fonction mesurée expérimentalement en deux points a et $a + h$.
- f sera approchée par la droite parallèle à l'axe des abscisses d'équation $y = f(a)$.

Calcul approché de l'intégrale

Méthode des rectangles

Méthode des rectangles pour deux points

- Soit f une fonction mesurée expérimentalement en deux points a et $a+h$.
- f sera approchée par la droite parallèle à l'axe des abscisses d'équation $y = f(a)$.
- Par conséquent, la surface sous cette droite est un **rectangle** de bases h et $f(a)$ et d'aire $hf(a)$.

Calcul approché de l'intégrale

Méthode des rectangles

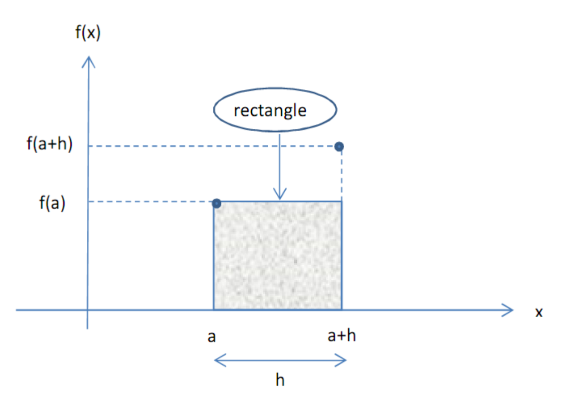
Méthode des rectangles pour deux points

- Soit f une fonction mesurée expérimentalement en deux points a et $a+h$.
- f sera approchée par la droite parallèle à l'axe des abscisses d'équation $y = f(a)$.
- Par conséquent, la surface sous cette droite est un **rectangle** de bases h et $f(a)$ et d'aire $hf(a)$.
- Donc on a le résultat suivant

$$\boxed{I = \int_a^{a+h} f(t)dt \approx hf(a)}$$

Calcul approché de l'intégrale

Méthode des rectangles



Calcul approché de l'intégrale

Méthode des rectangles

Méthode des rectangles pour (n+1) points régulièrement répartis

- La fonction f est la donnée des mesures expérimentales en $(n+1)$ points.

Calcul approché de l'intégrale
Méthode des rectangles

Méthode des rectangles pour (n+1) points régulièrement répartis

- La fonction f est la donnée des mesures expérimentales en $(n+1)$ points.
- Ces points sont régulièrement répartis donnés par $(a = x_0, x_1, x_2, x_3, ..., x_n = b)$, où $x_i = a + ih$.

Calcul approché de l'intégrale
Méthode des rectangles

Méthode des rectangles pour (n+1) points régulièrement répartis

- La fonction f est la donnée des mesures expérimentales en $(n+1)$ points.
- Ces points sont régulièrement répartis donnés par $(a = x_0, x_1, x_2, x_3, ..., x_n = b)$, où $x_i = a + ih$.
- Entre chaque deux points (x_i, x_{i+1}) la fonction f est approchée par une droite parallèle à l'axe des abscisses d'équation $y = f(x_i)$.

Calcul approché de l'intégrale

Méthode des rectangles

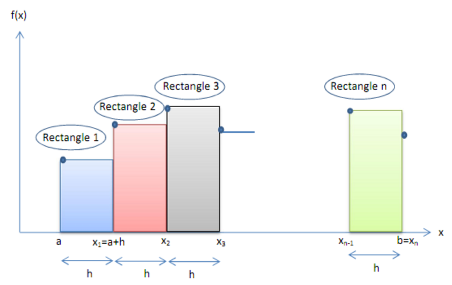
Méthode des rectangles pour (n+1) points régulièrement répartis

- La fonction f est la donnée des mesures expérimentales en $(n+1)$ points.
- Ces points sont régulièrement répartis donnés par $(a = x_0, x_1, x_2, x_3, ..., x_n = b)$, où $x_i = a + ih$.
- Entre chaque deux points (x_i, x_{i+1}) la fonction f est approchée par une droite parallèle à l'axe des abscisses d'équation $y = f(x_i)$.
- Sous chaque droite, on obtient un rectangle de bases h et $f(x_i)$.

Calcul approché de l'intégrale

Méthode des rectangles

Méthode des rectangles pour (n+1) points régulièrement répartis



Calcul approché de l'intégrale

Méthode des rectangles

Méthode des rectangles pour (n+1) points régulièrement répartis

- Alors l'intégrale $I = \int_a^b f(t)dt$ est estimée par la somme des aires de ces n rectangles

$$\boxed{I \approx I_{rec\tan gle} = h\{f(a) + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\}, h = \frac{b-a}{n}}$$

Remarque

L'erreur d'estimation est donné par la différence entre la valeur exacte de l'intégrale notée I et la valeur approchée notée $I_{rec\tan gle}$.

Calcul approché de l'intégrale
Méthode des trapèzes

Méthode des trapèzes pour deux points

- La fonction f mesurée expérimentalement en deux points a et $a+h$.

Calcul approché de l'intégrale

Méthode des trapèzes

Méthode des trapèzes pour deux points

- La fonction f mesurée expérimentalement en deux points a et $a+h$.
- Par cette méthode, la fonction f est approximée par une droite.

Calcul approché de l'intégrale

Méthode des trapèzes

Méthode des trapèzes pour deux points

- La fonction f mesurée expérimentalement en deux points a et $a+h$.
- Par cette méthode, la fonction f est approximée par une droite.
- Sous cette droite on obtient un **trapèze** d'une petite base $f(a)$, grande base $f(a+h)$ et d'un hauteur h

Calcul approché de l'intégrale

Méthode des trapèzes

Méthode des trapèzes pour deux points

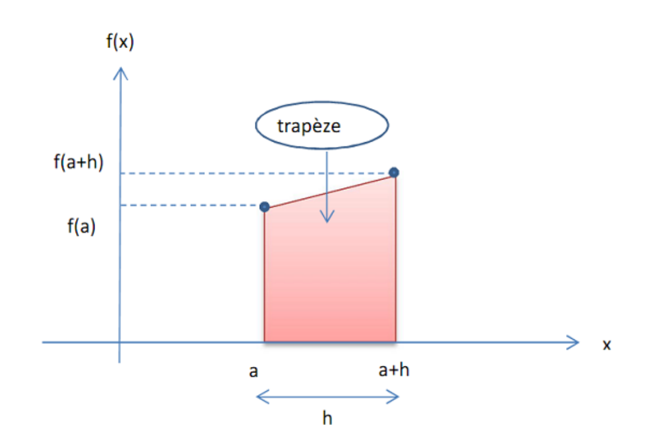
- La fonction f mesurée expérimentalement en deux points a et $a+h$.
- Par cette méthode, la fonction f est approximée par une droite.
- Sous cette droite on obtient un **trapèze** d'une petite base $f(a)$, grande base $f(a+h)$ et d'un hauteur h
- Donc l'intégrale $I = \int_{a}^{a+h} f(t)dt$ est estimé par l'aire de ce trapèze:

$$\boxed{I_{trapèze} = \frac{h}{2}\{f(a)f(a+h)\}}$$

Calcul approché de l'intégrale

Méthode des trapèzes

Méthode des trapèzes pour deux points



Calcul approché de l'intégrale

Méthode des trapèzes

Méthode des trapèzes pour (n+1) points régulièrement répartis

- La fonction f est mesurée expérimentalement en $(n+1)$ points régulièrement répartis

Calcul approché de l'intégrale

Méthode des trapèzes

Méthode des trapèzes pour (n+1) points régulièrement répartis

- La fonction f est mesurée expérimentalement en $(n+1)$ points régulièrement répartis
- Entre chaque couples de points (x_i, x_{i+1}) on approxime f par une droite.

Calcul approché de l'intégrale
Méthode des trapèzes

Méthode des trapèzes pour (n+1) points régulièrement répartis

- La fonction f est mesurée expérimentalement en $(n+1)$ points régulièrement répartis
- Entre chaque couples de points (x_i, x_{i+1}) on approxime f par une droite.
- Sous chaque droite on a un trapèze.

Calcul approché de l'intégrale

Méthode des trapèzes

Méthode des trapèzes pour (n+1) points régulièrement répartis

- La fonction f est mesurée expérimentalement en $(n+1)$ points régulièrement répartis
- Entre chaque couples de points (x_i, x_{i+1}) on approxime f par une droite.
- Sous chaque droite on a un trapèze.
- $I = \int_a^b f(t)dt$ est estimé par la somme des aires de n trapèzes.

$$\boxed{I_{trapèzes} = \frac{h}{2}\{f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\}, h = \frac{b-a}{n}.}$$

Calcul approché de l'intégrale

Méthode de Simpson

Méthode de Simpson pour trois points régulièrement répartis

- La fonction f est mesurée expérimentalement en trois points régulièrement répartis $x-h, x$ et $x+h$.

Calcul approché de l'intégrale

Méthode de Simpson

Méthode de Simpson pour trois points régulièrement répartis

- La fonction f est mesurée expérimentalement en trois points régulièrement répartis $x-h, x$ et $x+h$.
- Comme on a trois points, on peut approximer la fonction f par un **arc de parabole**.

Calcul approché de l'intégrale

Méthode de Simpson

Méthode de Simpson pour trois points régulièrement répartis

- La fonction f est mesurée expérimentalement en trois points régulièrement répartis $x-h, x$ et $x+h$.
- Comme on a trois points, on peut approximer la fonction f par un **arc de parabole**.
- Le calcul estimé de l'intégrale $I = \int_{x-h}^{x+h} f(t)dt$ est donné par l'aire sous cette parabole

$$\boxed{I_{\text{Si}\,mpson} = \frac{h}{3}\{f(x-h)+4f(x)+f(x-h)\}}$$

Calcul approché de l'intégrale
Méthode de Simpson

Méthode de Simpson pour (n+1) points régulièrement répartis

- La fonction f est mesurée en $(n+1)$ points régulièrement répartis $(a = x_0, x_1, x_2, x_3, ..., x_n = b)$ où n est pair et $h = \frac{b-a}{n}$.

Calcul approché de l'intégrale

Méthode de Simpson

Méthode de Simpson pour (n+1) points régulièrement répartis

- La fonction f est mesurée en $(n+1)$ points régulièrement répartis $(a = x_0, x_1, x_2, x_3, ..., x_n = b)$ où n est pair et $h = \frac{b-a}{n}$.
- La généralisation du résultat précédent (pour trois point) nous conduit à estimer l'intégrale $I = \int_a^b f(t)dt$ par

$$\boxed{I_{Simpson} = \frac{h}{3}\{f(a) + f(b) + 4\sum_{i=0}^{(n-2)/2} f(x_{2i+1}) + 2\sum_{i=1}^{(n-2)/2} f(x_{2i})\}}$$

Résolution d'équations: Méthode de Newton-Raphson

- Par fois la recherche de la solution r d'une équation $f(r) = 0$ par une méthode analytique est impossible.

Résolution d'équations: Méthode de Newton-Raphson

- Par fois la recherche de la solution r d'une équation $f(r) = 0$ par une méthode analytique est impossible.
- Pour cette raison, nous allons introduire une méthode numérique (**Newton-Raphson**) qui peut rendre cette recherche est plus facile.

Résolution d'équations: Méthode de Newton-Raphson

- Par fois la recherche de la solution r d'une équation $f(r) = 0$ par une méthode analytique est impossible.
- Pour cette raison, nous allons introduire une méthode numérique (**Newton-Raphson**) qui peut rendre cette recherche est plus facile.
- Cette méthode donne une valeur approchée de cette solution.

Résolution d'équations: Méthode de Newton-Raphson

- Par fois la recherche de la solution r d'une équation $f(r) = 0$ par une méthode analytique est impossible.
- Pour cette raison, nous allons introduire une méthode numérique (**Newton-Raphson**) qui peut rendre cette recherche est plus facile.
- Cette méthode donne une valeur approchée de cette solution.
- Pour pouvoir appliquer la méthode de Newton-Raphson, la fonction f doit être **continue**, **monotone** et **dérivable** sur l'intervalle étudié.

Résolution d'équations: Méthode de Newton-Raphson

Méthode de de Newton-Raphson

1. fixer la précision ε cherchée sur l'approximation de la solution r

Résolution d'équations: Méthode de Newton-Raphson

Méthode de de Newton-Raphson

1. fixer la précision ε cherchée sur l'approximation de la solution r
2. mettre l'équetion sous la forme $f(x) = 0$

Résolution d'équations: Méthode de Newton-Raphson

Méthode de de Newton-Raphson

1. fixer la précision ε cherchée sur l'approximation de la solution r
2. mettre l'équetion sous la forme $f(x) = 0$
3. calculer $f'(x)$

Résolution d'équations: Méthode de Newton-Raphson

Méthode de de Newton-Raphson

1. fixer la précision ε cherchée sur l'approximation de la solution r
2. mettre l'équetion sous la forme $f(x) = 0$
3. calculer $f'(x)$
4. choisir graphiquement un point de départ x_0

Résolution d'équations: Méthode de Newton-Raphson

Méthode de Newton-Raphson

- calculer $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

Résolution d'équations: Méthode de Newton-Raphson

Méthode de Newton-Raphson

- calculer $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$
- comparer $|x_1 - x_0|$ à ε :

Résolution d'équations: Méthode de Newton-Raphson

Méthode de Newton-Raphson

- calculer $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$
- comparer $|x_1 - x_0|$ à ε :
  1. si $|x_1 - x_0| < \varepsilon$: fin de la procédure $r = x_0 = x_1$

Résolution d'équations: Méthode de Newton-Raphson

Méthode de Newton-Raphson

- calculer $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$
- comparer $|x_1 - x_0|$ à ε :
  1. si $|x_1 - x_0| < \varepsilon$: fin de la procédure $r = x_0 = x_1$
  2. si $|x_1 - x_0| > \varepsilon$: x_1 devient un nouveau point de départ et on calcule $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$ puis on compare $|x_2 - x_1|$ à ε, et on poursuit les itérations en calculant $x_3, ..., x_{n+1}$ jusqu'à ce que $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$

Résolution d'équations: Méthode de Newton-Raphson

Exemple

Résoudre l'équation $\ln(x) = x - 2$ à 10^{-3} près.

- la précision recherchée est $\varepsilon = 10^{-3}$

Résolution d'équations: Méthode de Newton-Raphson

Exemple

Résoudre l'équation $\ln(x) = x - 2$ à 10^{-3} près.

- la précision recherchée est $\varepsilon = 10^{-3}$
- mettre l'équation sous la forme $f(x) = 0$: $f(x) = \ln(x) - x + 2 = 0$.

Résolution d'équations: Méthode de Newton-Raphson

Exemple

Résoudre l'équation $\ln(x) = x - 2$ à 10^{-3} près.

- la précision recherchée est $\varepsilon = 10^{-3}$
- mettre l'équation sous la forme $f(x) = 0$: $f(x) = \ln(x) - x + 2 = 0$.
- calculer $f'(x)$: $f'(x) = \frac{1}{x} - 1$

Résolution d'équations: Méthode de Newton-Raphson

Exemple

Résoudre l'équation $\ln(x) = x - 2$ à 10^{-3} près.

- la précision recherchée est $\varepsilon = 10^{-3}$
- mettre l'équation sous la forme $f(x) = 0$: $f(x) = \ln(x) - x + 2 = 0$.
- calculer $f'(x)$: $f'(x) = \frac{1}{x} - 1$
- la courbe $f(x)$ coupe l'axe des abscisses en deux points, l'une est proche de 0 et l'autre est proche de 3.

Résolution d'équations: Méthode de Newton-Raphson

Exemple

Résoudre l'équation $\ln(x) = x - 2$ à 10^{-3} près.

- la précision recherchée est $\varepsilon = 10^{-3}$
- mettre l'équation sous la forme $f(x) = 0$: $f(x) = \ln(x) - x + 2 = 0$.
- calculer $f'(x)$: $f'(x) = \frac{1}{x} - 1$
- la courbe $f(x)$ coupe l'axe des abscisses en deux points, l'une est proche de 0 et l'autre est proche de 3.
- choisissons un point de départ $x_0 = 3$

Résolution d'équations: Méthode de Newton-Raphson

Exemple

Résoudre l'équation $\ln(x) = x - 2$ à 10^{-3} près.

- la précision recherchée est $\varepsilon = 10^{-3}$
- mettre l'équation sous la forme $f(x) = 0$: $f(x) = \ln(x) - x + 2 = 0$.
- calculer $f'(x)$: $f'(x) = \frac{1}{x} - 1$
- la courbe $f(x)$ coupe l'axe des abscisses en deux points, l'une est proche de 0 et l'autre est proche de 3.
- choisissons un point de départ $x_0 = 3$
- $x_1 = 3 - \frac{f(3)}{f'(3)} = 3.147918433$

Résolution d'équations: Méthode de Newton-Raphson

Exemple

- $|x_1 - x_0| = 0.147918433 > \varepsilon$, donc x_0 devient un nouveau point de départ, d'où le tableau

Résolution d'équations: Méthode de Newton-Raphson

Exemple

- $|x_1 - x_0| = 0.147918433 > \varepsilon$, donc x_0 devient un nouveau point de départ, d'où le tableau
-

i	x_i	$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$	$\lvert x_{n+1} - x_n \rvert$	test
0	3	$3,147918433$	$0,147918433$	$> \varepsilon$
1	$3,147918433$	$3,146193441$	$0,001724992$	$> \varepsilon$
2	$3,146193441$	$3,146193221$	$2,2.10^{-7}$	$< \varepsilon$

Résolution d'équations: Méthode de Newton-Raphson

Exemple

- $|x_1 - x_0| = 0.147918433 > \varepsilon$, donc x_0 devient un nouveau point de départ, d'où le tableau
-

i	x_i	$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$	$\lvert x_{n+1} - x_n \rvert$	test
0	3	$3,147918433$	$0,147918433$	$> \varepsilon$
1	$3,147918433$	$3,146193441$	$0,001724992$	$> \varepsilon$
2	$3,146193441$	$3,146193221$	$2,2.10^{-7}$	$< \varepsilon$

- D'où $\boxed{r \approx 3,146}$

Résolution d'équations: Méthode de Newton-Raphson

Exemple

- Si on prend un point de départ proche de 0 : $x_0 = 0,1$ alors on obtient

Résolution d'équations: Méthode de Newton-Raphson

Exemple

- Si on prend un point de départ proche de 0 : $x_0 = 0,1$ alors on obtient
-

i	x_i	$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$	$\lvert x_{n+1} - x_n \rvert$	test
0	$0,1$	$0,14473168$	$0,04473168$	$> \varepsilon$
1	$0,14473168$	$0,15786436$	$0,01313268$	$> \varepsilon$
2	$0,15786436$	$0,15859234$	$0,00072799$	$< \varepsilon$

Résolution d'équations: Méthode de Newton-Raphson

Exemple

- Si on prend un point de départ proche de 0 : $x_0 = 0,1$ alors on obtient
-

i	x_i	$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$	$\lvert x_{n+1} - x_n \rvert$	test
0	$0,1$	$0,14473168$	$0,04473168$	$> \varepsilon$
1	$0,14473168$	$0,15786436$	$0,01313268$	$> \varepsilon$
2	$0,15786436$	$0,15859234$	$0,00072799$	$< \varepsilon$

- D'où $\boxed{r \approx 0,159}$

S. Bénazeth, et als. Biomathématiques, Analyse, Algebre, probabilités, statistiques. Masson, Paris, 2001.