Cours de Biomathématiques-Biostatistiques

$1^{ère}$ année Pharmacie 2020/2021

Dr. M. Hamamda

Ce chapitre est consacré au calcul intégral:

- intégration par parties

et aux équations différentielles:

Ce chapitre est consacré au calcul intégral:

- intégration par parties
- changement de variables

et aux équations différentielles:

Ce chapitre est consacré au calcul intégral:

- intégration par parties
- changement de variables
- règles de Bioche,. . .

et aux équations différentielles:

Ce chapitre est consacré au calcul intégral:

- intégration par parties
- changement de variables
- règles de Bioche,...

et aux équations différentielles:

- linéaires à coefficients constants du premier et du deuxième ordre sans et avec second membre

Ce chapitre est consacré au calcul intégral:

- intégration par parties
- changement de variables
- règles de Bioche,...

et aux équations différentielles:

- linéaires à coefficients constants du premier et du deuxième ordre sans et avec second membre
- équations homogènes

Ce chapitre est consacré au calcul intégral:

- intégration par parties
- changement de variables
- règles de Bioche,...

et aux équations différentielles:

- linéaires à coefficients constants du premier et du deuxième ordre sans et avec second membre
- équations homogènes
- équations de Bernoulli, ...

1. Calcul intégral et primitives

Définition

L'intégrale d'une fonction continue f sur $[a, b]$ mesure l'air de la portion du plan comprise entre la courbe $y = f(x)$, l'axe des x et les droites $x = a$, $x = b$ et notée $\int_a^b f(x)dx$.

Théorème

Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue alors f est intégrable.

1. Calcul intégral et primitives

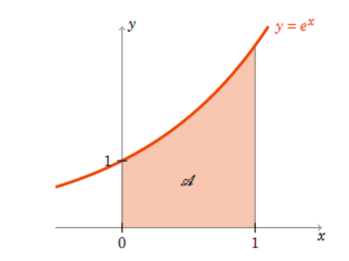
Exemple

- Consédirant la fonction exponentielle $f(x) = e^x$.

1. Calcul intégral et primitives

Exemple

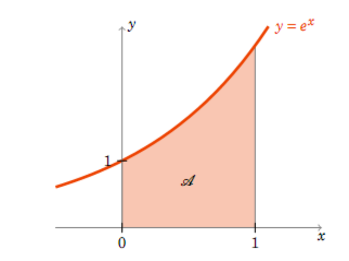
- Consédirant la fonction exponentielle $f(x) = e^x$.
- On souhaite calculer l'aire $\mathfrak{A}$ en-dessous du graphe de f et entre les droites $x = 0$, $x = 1$ et l'axe Ox



1. Calcul intégral et primitives

Exemple

- Consédirant la fonction exponentielle $f(x) = e^x$.
- On souhaite calculer l'aire $\mathfrak{A}$ en-dessous du graphe de f et entre les droites $x = 0$, $x = 1$ et l'axe Ox



- Alors l'aire $\mathfrak{A} = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 e^x dx$

1.1. Propriétés de l'intégrale

1.1.1. Relation de Chasles

Proposition 1

Soient $a < c < b$. Si f est intégrable sur $[a, c]$ et $[c, b]$, alors f est intégrable sur $[a, b]$. Et on a

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Remarque

On a:

- $\int_a^a f(x)dx = 0,$

1.1. Propriétés de l'intégrale

1.1.1. Relation de Chasles

Proposition 1

Soient $a < c < b$. Si f est intégrable sur $[a, c]$ et $[c, b]$, alors f est intégrable sur $[a, b]$. Et on a

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Remarque

On a:

- $\int_a^a f(x)dx = 0,$
- Pour $a < b, \int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$

1.1. Propriétés de l'intégrale

1.1.2. Positivité de l'intégrale

Proposition 2

- Soit $a \leq b$ deux réels et f et g deux fonctions intégrables sur $[a, b]$.

1.1. Propriétés de l'intégrale

1.1.2. Positivité de l'intégrale

Proposition 2

- Soit $a \leq b$ deux réels et f et g deux fonctions intégrables sur $[a, b]$.
- Si $f \leq g$ alors

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

1.1. Propriétés de l'intégrale

1.1.2. Positivité de l'intégrale

Proposition 2

- Soit $a \leq b$ deux réels et f et g deux fonctions intégrables sur $[a, b]$.
- Si $f \leq g$ alors

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

- En particulier, si $f \geq 0$ alors

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

1.1. Propriétés de l'intégrale

1.1.3. Linéarité de l'intégrale

Proposition 3

Si f et g deux fonctions intégrables sur $[a, b]$. Alors on a:

- $f + g$ est une fonction intégrable et
  $\int\limits_a^b (f+g)(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_a^b g(x)dx.$

1.1. Propriétés de l'intégrale

1.1.3. Linéarité de l'intégrale

Proposition 3

Si f et g deux fonctions intégrables sur $[a, b]$. Alors on a:

- $f + g$ est une fonction intégrable et $\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$
- Pour tout réel $\lambda, \lambda f$ est intégrable et on a $\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx.$

  "La linéarité de l'intégrale"

1.1. Propriétés de l'intégrale

1.1.3. Linéarité de l'intégrale

Proposition 3

Si f et g deux fonctions intégrables sur $[a,b]$. Alors on a:

- $f+g$ est une fonction intégrable et $\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$
- Pour tout réel $\lambda, \lambda f$ est intégrable et on a $\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx.$

  "La linéarité de l'intégrale"
- Plus généralement, pour tous réels λ et μ

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx.$$

1.1. Propriétés de l'intégrale
1.1.3. Linéarité de l'intégrale

Proposition 4

Si f et g sont deux fonctions intégrables, alors:

- $f \times g$ est une fonction intégrable sur $[a, b]$ mais en général $\int_a^b (fg)(x)dx \neq (\int_a^b f(x)dx)(\int_a^b g(x)dx)$.

1.1. Propriétés de l'intégrale

1.1.3. Linéarité de l'intégrale

Proposition 4

Si f et g sont deux fonctions intégrables, alors:

- $f \times g$ est une fonction intégrable sur $[a, b]$ mais en général $\int_a^b (fg)(x)dx \neq (\int_a^b f(x)dx)(\int_a^b g(x)dx)$.
- $|f|$ est une fonction intégrable sur $[a, b]$ et $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$.

1.1. Propriétés de l'intégrale

1.1.3. Linéarité de l'intégrale

Proposition 4

Si f et g sont deux fonctions intégrables, alors:

- $f \times g$ est une fonction intégrable sur $[a, b]$ mais en général $\int_a^b (fg)(x)dx \neq (\int_a^b f(x)dx)(\int_a^b g(x)dx)$.
- $|f|$ est une fonction intégrable sur $[a, b]$ et $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$.
- Si f est paire et $[-\alpha, \alpha] \subset [a, b]$ alors $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 2\int_0^{\alpha} f(x)dx$.

1.1. Propriétés de l'intégrale

1.1.3. Linéarité de l'intégrale

Proposition 4

Si f et g sont deux fonctions intégrables, alors:

- $f \times g$ est une fonction intégrable sur $[a, b]$ mais en général $\int\limits_a^b (fg)(x)dx \neq (\int\limits_a^b f(x)dx)(\int\limits_a^b g(x)dx)$.
- $|f|$ est une fonction intégrable sur $[a, b]$ et $\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \leq \int\limits_a^b |f(x)|\, dx$.
- Si f est paire et $[-\alpha, \alpha] \subset [a, b]$ alors $\int\limits_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 2\int\limits_0^{\alpha} f(x)dx$.
- Si f est impaire alors $\int\limits_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 0$.

1.2. Primitive d'une fonction

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle quelconque I de $\mathbb{R}$. On dit que $F : I \to \mathbb{R}$ est une primitive de f sur I si F est une fonction dérivable sur I vérifiant $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$.

Proposition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et soit $F : I \to \mathbb{R}$ une primitive de f. Toute primitive de f s'écrit $G = F + c$ où $c \in \mathbb{R}$.

1.3. Primitives des fonctions usuelles

Liste de quelques primitives des fonctions usuelles:

- $\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \alpha \in \mathbb{R} \backslash \{-1\}$

1.3. Primitives des fonctions usuelles

Liste de quelques primitives des fonctions usuelles:

- $\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \alpha \in \mathbb{R} \backslash \{-1\}$
- $\int e^{x} dx = e^{x} + c$

1.3. Primitives des fonctions usuelles

Liste de quelques primitives des fonctions usuelles:

- $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \alpha \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$
- $\int e^x dx = e^x + c$
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$

1.3. Primitives des fonctions usuelles

Liste de quelques primitives des fonctions usuelles:

- $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \alpha \in \mathbb{R} \backslash \{-1\}$
- $\int e^x dx = e^x + c$
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c$
- $\int \cos x dx = \sin x + c$

1.3. Primitives des fonctions usuelles

Liste de quelques primitives des fonctions usuelles:

- $\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \alpha \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$
- $\int e^{x} dx = e^{x} + c$
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$
- $\int \cos x dx = \sin x + c$
- $\int \sin x dx = -\cos x + c$

1.3. Primitives des fonctions usuelles

Liste de quelques primitives des fonctions usuelles:

- $\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \alpha \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$
- $\int e^{x} dx = e^{x} + c$
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$
- $\int \cos x dx = \sin x + c$
- $\int \sin x dx = -\cos x + c$
- $\int \frac{dx}{x+a} = \ln|x+a| + c$

1.3. Primitives des fonctions usuelles

Liste de quelques primitives des fonctions usuelles:

- $\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \alpha \in \mathbb{R} \backslash \{-1\}$
- $\int e^{x} dx = e^{x} + c$
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c$
- $\int \cos x dx = \sin x + c$
- $\int \sin x dx = -\cos x + c$
- $\int \frac{dx}{x+a} = \ln |x+a| + c$
- $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + c$

1.3. Primitives des fonctions usuelles

Liste de quelques primitives des fonctions usuelles:

- $\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \alpha \in \mathbb{R} \backslash \{-1\}$
- $\int e^{x} dx = e^{x} + c$
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c$
- $\int \cos x dx = \sin x + c$
- $\int \sin x dx = -\cos x + c$
- $\int \frac{dx}{x+a} = \ln |x+a| + c$
- $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + c$
- $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + c$

1.3. Primitives des fonctions usuelles

- $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + c \\ \frac{\pi}{2} - \arccos x + c \end{cases}$

Nous allons maintenant considérer que u est une fonction, alors

1.3. Primitives des fonctions usuelles

- $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + c \\ \frac{\pi}{2} - \arccos x + c \end{cases}$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + c.$

Nous allons maintenant considérer que u est une fonction, alors

1.3. Primitives des fonctions usuelles

- $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + c \\ \frac{\pi}{2} - \arccos x + c \end{cases}$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + c.$
- $\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + c$

Nous allons maintenant considérer que u est une fonction, alors

1.3. Primitives des fonctions usuelles

- $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + c \\ \frac{\pi}{2} - \arccos x + c \end{cases}$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + c.$
- $\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + c$

Nous allons maintenant considérer que u est une fonction, alors

- $\int u(x)u'(x)dx = \frac{1}{2}u^2(x) + c$

1.3. Primitives des fonctions usuelles

- $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + c \\ \frac{\pi}{2} - \arccos x + c \end{cases}$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + c.$
- $\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + c$

Nous allons maintenant considérer que u est une fonction, alors

- $\int u(x)u'(x)dx = \frac{1}{2}u^2(x) + c$
- $\int u^\alpha(x)u'(x)dx = \frac{1}{\alpha+1}u^{\alpha+1}(x) + c$

1.3. Primitives des fonctions usuelles

- $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + c \\ \frac{\pi}{2} - \arccos x + c \end{cases}$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + c.$
- $\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + c$

Nous allons maintenant considérer que u est une fonction, alors

- $\int u(x)u'(x)dx = \frac{1}{2}u^2(x) + c$
- $\int u^\alpha(x)u'(x)dx = \frac{1}{\alpha+1}u^{\alpha+1}(x) + c$
- $\int \frac{u'(x)}{u(x)}dx = \ln|u(x)| + c$

1.3. Primitives des fonctions usuelles

- $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + c \\ \frac{\pi}{2} - \arccos x + c \end{cases}$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + c.$
- $\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + c$

Nous allons maintenant considérer que u est une fonction, alors

- $\int u(x)u'(x)dx = \frac{1}{2}u^2(x) + c$
- $\int u^{\alpha}(x)u'(x)dx = \frac{1}{\alpha+1}u^{\alpha+1}(x) + c$
- $\int \frac{u'(x)}{u(x)}dx = \ln|u(x)| + c$
- $\int \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}dx = \sqrt{u(x)} + c$

1.4. Relation primitive-intégrale

Théorème

- Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

1.4. Relation primitive-intégrale

Théorème

- Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
- La fonction $F : I \to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est une primitive de f

1.4. Relation primitive-intégrale

Théorème

- Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
- La fonction $F : I \to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est une primitive de f
- c-à-d: F est dérivable et $F'(x) = f(x)$.

1.4. Relation primitive-intégrale

Théorème

- Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
- La fonction $F : I \to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est une primitive de f
- c-à-d: F est dérivable et $F'(x) = f(x)$.
- Par conséquent pour une primitive F quelconque de f

$$\int_a^b f(t)dt = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

1.4. Relation primitive-intégrale

Exemple

- Pour $f(x) = e^x$, une primitive de f est e^x. Donc

$$\int_0^1 e^x dx = [e^x]_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1.$$

1.4. Relation primitive-intégrale

Exemple

- Pour $f(x) = e^x$, une primitive de f est e^x. Donc

$$\int_0^1 e^x dx = [e^x]_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1.$$

- Pour $f(x) = x^2$, une primitive de f est $\frac{x^3}{3}$. Donc

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

1.4. Relation primitive-intégrale

Exemple

- Pour $f(x) = e^x$, une primitive de f est e^x. Donc

$$\int_0^1 e^x dx = [e^x]_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1.$$

- Pour $f(x) = x^2$, une primitive de f est $\frac{x^3}{3}$. Donc

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

- Pour $f(x) = \cos t$, une primitive de f est $\int_a^x \cos t dt = [\sin t]_{t=a}^{t=x} = \sin x - \sin a$.

1.5. Méthodes d'intégration

A. Changement de variable

Théorème

Soient $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $u : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ une fonction de dérivée continue et strictement monotone avec

$$\begin{cases} u(\alpha) = a \\ u(\beta) = b. \end{cases}$$

En effectuant dans l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ le changement de variable $x = u(t)$. Alors

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[u(t)]u'(t)dt.$$

1.5. Méthodes d'intégration

A. Changement de variable

Exemple 1

- Calcul de $I_1 = \int \frac{dx}{x^2+a^2}$.

1.5. Méthodes d'intégration

A. Changement de variable

Exemple 1

- Calcul de $I_1 = \int \frac{dx}{x^2+a^2}$.
- On a $I_1 = \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{\frac{x^2}{a^2}+1} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1}$.

1.5. Méthodes d'intégration

A. Changement de variable

Exemple 1

- Calcul de $I_1 = \int \frac{dx}{x^2+a^2}$.
- On a $I_1 = \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{\frac{x^2}{a^2}+1} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1}$.
- On pose $t = \frac{x}{a}$

1.5. Méthodes d'intégration
A. Changement de variable

Exemple 1

- Calcul de $I_1 = \int \frac{dx}{x^2+a^2}$.
- On a $I_1 = \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{\frac{x^2}{a^2}+1} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1}$.
- On pose $t = \frac{x}{a}$
- Alors $x = at$ et $dx = d(at) = adt$.

1.5. Méthodes d'intégration

A. Changement de variable

Exemple 1

- Calcul de $I_1 = \int \frac{dx}{x^2+a^2}$.
- On a $I_1 = \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{\frac{x^2}{a^2}+1} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1}$.
- On pose $t = \frac{x}{a}$
- Alors $x = at$ et $dx = d(at) = adt$.
- Donc

$$\frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1} = \frac{1}{a} \int \frac{dt}{(t)^2+1} = \frac{1}{a}\arctan(t)+c = \frac{1}{a}\arctan(\frac{x}{a})+c.$$

1.5. Méthodes d'intégration

A. Changement de variable

Exemple 2

- Calcul de $I_2 = \int_0^{1/2} \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}} dx.$

1.5. Méthodes d'intégration

A. Changement de variable

Exemple 2

- Calcul de $I_2 = \int\limits_0^{1/2} \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}} dx.$
- Soit le changement de variable $u = 1 - x^2$,

1.5. Méthodes d'intégration

A. Changement de variable

Exemple 2

- Calcul de $I_2 = \int_0^{1/2} \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}} dx.$
- Soit le changement de variable $u = 1 - x^2$,
- donc $du = -2x dx.$

1.5. Méthodes d'intégration

A. Changement de variable

Exemple 2

- Calcul de $I_2 = \int_0^{1/2} \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}} dx.$
- Soit le changement de variable $u = 1 - x^2,$
- donc $du = -2xdx.$
- On a alors

$$I_2 = \int_1^{3/4} \frac{\frac{-du}{2}}{(u)^{3/2}} = -\frac{1}{2} \int_1^{3/4} u^{-\frac{3}{2}} du = \left[u^{-\frac{1}{2}} \right]_1^{3/4} = \frac{2}{\sqrt{3}} - 1.$$

1.5. Méthodes d'intégration

B. Intégration par partie

Théorème

Soit u et v deux fonctions de classe C^1 sur un intervalle $[a, b]$.

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [uv]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx.$$

Exemple 1

- Pour calculer $\int_0^1 xe^x dx$, on pose $u(x) = x$ et $v'(x) = e^x$.

1.5. Méthodes d'intégration

B. Intégration par partie

Théorème

Soit u et v deux fonctions de classe C^1 sur un intervalle $[a, b]$.

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [uv]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx.$$

Exemple 1

- Pour calculer $\int_0^1 xe^x dx$, on pose $u(x) = x$ et $v'(x) = e^x$.
- On aura $u'(x) = 1$ et une priitive de $v'(x) = e^x$ est $v(x) = e^x$

1.5. Méthodes d'intégration

B. Intégration par partie

Théorème

Soit u et v deux fonctions de classe C^1 sur un intervalle $[a, b]$.

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [uv]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx.$$

Exemple 1

- Pour calculer $\int_0^1 xe^x dx$, on pose $u(x) = x$ et $v'(x) = e^x$.
- On aura $u'(x) = 1$ et une priitive de $v'(x) = e^x$ est $v(x) = e^x$
- La formule d'intégration par partie donne:

1.5. Méthodes d'intégration

B. Intégration par partie

Exemple 1

$$\begin{aligned}
\int_0^1 xe^x dx &= \int_0^1 u(x)v'(x)dx \\
&= [u(x)v(x)]_0^1 - \int_0^1 u'(x)v(x)dx \\
&= [xe^x]_0^1 - \int_0^1 1.e^x dx \\
&= (1.e^1 - 0.e^0) - [e^x]_0^1 \\
&= 1.
\end{aligned}$$

1.5. Méthodes d'intégration

B. Intégration par partie

Exemple 2

- Calcul de $\int_1^e x \ln x dx$.

Alors

$$\begin{aligned}\int_1^e x \ln x dx &= \int_1^e u(x)v'(x)dx \\ &= [u(x)v(x)]_1^e - \int_1^e u'(x)v(x)dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2}.\frac{1}{x}dx\end{aligned}$$

1.5. Méthodes d'intégration

B. Intégration par partie

Exemple 2

- Calcul de $\int_1^e x \ln x dx$.
- On pose $u(x) = \ln x$ et $v'(x) = x$,donc $u'(x) = \frac{1}{x}$ et $v(x) = \frac{1}{2}x^2$.

Alors

$$\begin{aligned}
\int_1^e x \ln x dx &= \int_1^e u(x)v'(x)dx \\
&= [u(x)v(x)]_1^e - \int_1^e u'(x)v(x)dx \\
&= \left[\frac{x^2}{2} \ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} . \frac{1}{x} dx
\end{aligned}$$

1.5. Méthodes d'intégration

B. Intégration par partie

Exemple 2

$$
\begin{aligned}
&= (\frac{e^2}{2}.\ln e - \frac{e^1}{2}\ln 1) - \frac{1}{2}\int_1^e x dx \\
&= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^e \\
&= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}(\frac{e^2}{2} - \frac{1^2}{2}) \\
&= \frac{e^2+1}{4}.
\end{aligned}
$$

1. Chapitre 2: Calcul intégral et équations différentielles
   - 1. Calcul intégral et primitives
   - 2. Equations différentielles

Introduction

- Dans l'exemple suivant x désigne le nombre d'individus de la population étudiée (population humaine, population bacterienne,...).
- On considère x comme un réel.
- L'hypothèse de base est que si $x(t)$ est la population à l'instant t, la population à l'instant $t + \Delta t$ où Δt est trés petit, vaut

Introduction

- $$\begin{cases} x(t+\Delta t) = x(t) + kx(t)\Delta t \\ k = cte > 0. \end{cases}$$

- Divisant par Δt et passant à la limite quand $\Delta t \to 0$ on obtien l'équation différentielle du premier ordre

$$x'(t) = kx(t)$$

où $x'(t)$ est la dérivée par rapport à t.

Introduction

Définition

- On appele équation différentielle du premier ordre l'équation du type
$$F(x, y, y') = 0 \tag{1}$$
où y est une fonction inconnue.

Introduction

Définition

- On appele équation différentielle du premier ordre l'équation du type
$$F(x, y, y') = 0 \tag{1}$$
où y est une fonction inconnue.

- Résoudre l'équation différentielle (1) consiste à chercher toutes les fonctions y dérivables en x vérifiant cette équation.

Introduction

Définition

- On appele équation différentielle du premier ordre l'équation du type
$$F(x, y, y') = 0 \tag{1}$$
où y est une fonction inconnue.

- Résoudre l'équation différentielle (1) consiste à chercher toutes les fonctions y dérivables en x vérifiant cette équation.

- On appele solution sur $I \subset \mathbb{R}$ de l'équation (1) toute fonction $y : I \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow y(x)$ telle que:

Introduction

Définition

- On appele équation différentielle du premier ordre l'équation du type
$$F(x, y, y') = 0 \tag{1}$$
où y est une fonction inconnue.

- Résoudre l'équation différentielle (1) consiste à chercher toutes les fonctions y dérivables en x vérifiant cette équation.

- On appele solution sur $I \subset \mathbb{R}$ de l'équation (1) toute fonction $y : I \to \mathbb{R}, x \to y(x)$ telle que:
  - y est dérivable sur I

Introduction

Définition

- On appele équation différentielle du premier ordre l'équation du type
$$F(x, y, y') = 0 \tag{1}$$
où y est une fonction inconnue.

- Résoudre l'équation différentielle (1) consiste à chercher toutes les fonctions y dérivables en x vérifiant cette équation.

- On appele solution sur $I \subset \mathbb{R}$ de l'équation (1) toute fonction $y : I \to \mathbb{R}, x \to y(x)$ telle que:
  - y est dérivable sur I
  - $\forall x \in I, F(x, y(x), y'(x)) = 0.$

Introduction

Exemple

Soit l'équation $\begin{cases} y' = ky \\ k \neq 0 \end{cases}$,où y est une fonction de x. On a

$$y' = y'(x) = \frac{dy}{dx} = ky(x)$$

$$\Longrightarrow \frac{dy}{y} = kdx, y \neq 0$$

$$\Longrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int kdx$$

$$\Longrightarrow \ln|y| + c_1 = kx + c_2$$

$$\Longrightarrow \ln|y| = kx + c, c = c_1 + c_2$$

$$\Longrightarrow y = e^{kx+c} = \lambda e^{kx}, \lambda = e^c = cte$$

Introduction

Théorème (Existence et unicité d'une solution satisfaisant une condition initiale.)

Soit l'équation différentielle

$$\begin{cases} F(x, y, y') = 0 \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \tag{2}$$

Il existe une solution unique y de l'équation différentielle (2) telle que la condition initiale $y(x_0) = y_0$ est vérifiée.

Introduction

Exemple

Soit l'équation différentielle

$$\begin{cases} y' = ky \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

La solution de cette équation est $y = \lambda.e^{kx}$ et on a $y(0) = 2$ alors

$$y(0) = \lambda e^{k.0} = \lambda = 2$$

donc la solution qui vérifiée la condition initiale $y(0) = 2$ est donnée par

$$y = 2.e^{kx}.$$

1. Equation différentielle linéaire du premier ordre sans second membre

Définition

Toute équation différentielle de la forme

$$y' = f(x)y$$

est appelée équation différentielle linéaire du premier ordre sans second membre.

1. Equation différentielle linéaire du premier ordre sans second membre

Résolution d'une équation linéaire du premier ordre sans second membre

On a

$$y' = f(x)y \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = f(x)y$$

$$\Longrightarrow \frac{dy}{y} = f(x)dx$$

$$\Longrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int f(x)dx$$

$$\Longrightarrow \ln|y| = \int f(x)dx + c$$

$$\Longrightarrow y = e^{\int f(x)dx + c}$$

$$\Longrightarrow y = \lambda e^{\int f(x)dx}, \lambda = e^{c}.$$

1. Equation différentielle linéaire du premier ordre sans second membre

Exemple. Résoudre l'équation y'-xy=0.

$$y' - xy = 0 \Longrightarrow y' = xy$$
$$\Longrightarrow \frac{dy}{dx} = xy$$
$$\Longrightarrow \frac{dy}{y} = xdx$$
$$\Longrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int xdx$$

donc

$$\ln|y| = \frac{1}{2}x^2 + c$$
$$\Longrightarrow y = e^{\frac{1}{2}x^2+c}$$
$$\Longrightarrow y = e^{\frac{1}{2}x^2}.e^c$$
$$\Longrightarrow y = \lambda e^{\frac{1}{2}x^2}, \lambda = \pm e^c.$$

2. Equation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre

Définition

Toute équation différentielle de la forme

$$y' = f(x)y + g(x) \tag{3}$$

est appelée équation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre.

Théorème

La solution générale (SGEASM) de l'équation (3) est donnée par

$$\underbrace{y}_{SGEASM} = \underbrace{y_0}_{SGESSM} + \underbrace{Y}_{SPEASM}.$$

2. Equation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre

Résolution de l'équation par la méthode de variation de la constante

La solution générale de l'équation (3) sans second membre $y' = f(x)y$ est $y_0 = \lambda e^{F(x)}$ avec $F(x) = \int f(x)dx$. Posons

$$y = SGEASM = \lambda(x)e^{F(x)},$$

alors

$$\begin{aligned} y' &= \lambda'(x)e^{F(x)} + \lambda(x)f(x)e^{F(x)} \\ &= f(x)\lambda(x)e^{F(x)} + g(x). \end{aligned}$$

2. Equation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre

Résolution de l'équation par la méthode de variation de la constante

D'où

$$\lambda'(x)e^{F(x)} = g(x)$$
$$\Longrightarrow \lambda'(x) = \frac{g(x)}{e^{F(x)}} = g(x)e^{-F(x)}$$
$$\Longrightarrow \lambda(x) = \int g(x)e^{-F(x)}dx + \beta.$$

Donc

$$y = [\int g(x)e^{-F(x)}dx + \beta]e^{F(x)}$$
$$y = \underbrace{\beta e^{F(x)}}_{y_0} + \underbrace{e^{F(x)} \int g(x)e^{-F(x)}dx}_{Y}.$$

2. Equation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre

Exemple

Résudre l'équation linéaire du premier ordre avec second membre

$$y\prime = -y + x^2.$$

On résoud d'abord l'équation sans second membre $y' = -y$. On aura

$$y_0 = SGESSM = \lambda e^{\int f(x)dx} = \lambda e^{-x}.$$

Posons

$$y = SGEASM = \lambda(x)e^{-x}$$
$$\Longleftrightarrow y' = \lambda'(x)e^{-x} - \lambda(x)e^{-x}$$

alors

$$y' + y = \lambda'(x)e^{-x} \underbrace{- \lambda(x)e^{-x} + \lambda(x)e^{-x}}_{0} = g(x) = x^2$$

2. Equation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre

Exemple

$$\Longleftrightarrow \lambda'(x) = \frac{x^2}{e^{-x}} \Longrightarrow \lambda(x) = \int x^2 e^x dx.$$

A l'aide de deux intégrations par parties on obtient

$$\lambda(x) = e^x(x^2 - 2x + 2) + K, K \in \mathbb{R}$$

$$y = [e^x(x^2 - 2x + 2) + K]e^{-x}$$
$$y = \underbrace{x^2 - 2x + 2}_{Y} + \underbrace{Ke^{-x}}_{y_0}.$$

3. Equations différentielles du second ordre

3.1. Equations différentielles du second ordre pouvant se ramener au premier ordre

Définition

On appelle équation différentielle du second ordre toute relation de la forme:

$$\forall x, F(x, y, y', y'') = 0$$

entre la variable x, la fonction y, sa dérivée première y' et sa dérivée seconde y''.

Proposition

- Toute relation de la forme $F(x, y', y'') = 0$, c'est-à-dire sans y, peut se ramener à deux équations différentielles de premier ordre.
- En effet, en posant $z = y'$ et $z' = y''$, donc la relation devient:

$$F(x, z, z') = 0.$$

3. Equations différentielles du second ordre

3.1. Equations différentielles du second ordre pouvant se ramener au premier ordre

Exemple: Résoudre y”+y’=0.

En posant $z = y'$, l'équation devient: $z' + z = 0$. D'où

$$\begin{aligned}
\frac{dz}{dx} &= -z \\
&\Longleftrightarrow \frac{dz}{z} = -dx \\
&\Longleftrightarrow \int \frac{dz}{z} = -\int dx \\
&\Longleftrightarrow \ln|z| = -x + c_1 \\
&\Longleftrightarrow z = c_2 e^{-x}, c_2 = e^{c_1}.
\end{aligned}$$

Or

$$y = \int z(x)dx = c_3 e^{-x} + c_4.$$

3. Equations différentielles du second ordre

3.2. Equations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants sans second membre

Définition 1

Une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants sans second membre est définie par l'équation

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{4}$$

où $a(\neq 0), b$ et c sont des constantes réelles et y une fonction de x.

Définition 2

Soient y_1 et y_2 deux fonctions dérivables. On appelle **Wronskien** la fonction $W(y_1, y_2)$ associée à y_1 et y_2 par:

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2.$$

3. Equations différentielles du second ordre

3.2. Equations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants sans second membre

Proposition 1

Si y_1 et y_2 sont deux solutions de l'équation (4), et que le Wronskien est non nul, alors y_1 et y_2 sont deux solutions linéairement indépendantes (c'est-à-dire non propostionnelles) $(y_1 \neq ky_2)$.

Proposition 2

Si y_1 et y_2 sont deux solutions linéairement indépendantes de l'équation (4), l'ensemble des solutions du système est donné par

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

où c_1 et c_2 sont deux constantes réelles.

3. Equations différentielles du second ordre

3.2. Equations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants sans second membre

La résolution

Vérifions que les solutions y_1 et y_2 sont de la forme $y = e^{rx}$. On en déduit

$$y' = re^{rx}, y'' = r^2 e^{rx}.$$

En les substituant dans l'équation (4), on obtient

$$ar^2 e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = (ar^2 + br + c)e^{rx} = 0.$$

Or, $e^{rx} \neq 0$. D'où **l'équation caractèristique**

$$ar^2 + br + c = 0.$$

Les solutions y_1 et y_2 dépendent des racines de cette équation caractèristique.

3. Equations différentielles du second ordre

3.2. Equations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants sans second membre

La résolution

D'où le calcul du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$:

- **Premier cas** $\Delta > 0$: Alors l'équation caractèristique a deux racines $r_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $r_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et la solution générale de (4) est
$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}.$$
- **Deuxième cas** $\Delta = 0$: Alors l'équation caractèristique a une racine double $r = \frac{-b}{2a}$ et
$$y = (c_1 + c_2 x)e^{rx}.$$
- **Troisième cas** $\Delta < 0$: Alors $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ et la solution de l'équation (4) est
$$y = [c_1 \sin(\beta x) + c_2 \cos(\beta x)]e^{\alpha x}.$$

3. Equations différentielles du second ordre

3.2. Equations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants sans second membre

Exemple 1

Résoudre l'équation différentielle

$$y'' + 4y' = 0. \tag{5}$$

L'équation caractèristique

$$\begin{aligned} r^2 + 4r &= 0 \Longleftrightarrow r(r+4) = 0 \\ &\Longleftrightarrow r_1 = -4 \text{ et } \; r_2 = 0 \end{aligned}$$

deux racines distinctes donc

$$y = c_1 e^{-4x} + c_2.$$

3. Equations différentielles du second ordre

3.2. Equations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants sans second membre

Exemple 2

Résoudre l'équation différentielle

$$y'' + 2y' + y = 0.$$

L'équation caractèristique

$$\begin{aligned} r^2 + 2r + 1 &= 0 \Longleftrightarrow (r+1)^2 = 0 \\ &\Longleftrightarrow r = -1 \end{aligned}$$

une racine double donc

$$y = (c_1 + c_2 x)e^{-x}.$$

3. Equations différentielles du second ordre

3.2. Equations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants sans second membre

Exemple 3

Résoudre l'équation

$$2y'' + 2y' + y = 0.$$

L'équation caractèristique: $2r^2 + 2r + 1 = 0$

$$\Delta = -4 = 4i^2 \Longleftrightarrow r = \frac{-2 \pm 2i}{4} = \frac{-1 \pm i}{2}$$

donc

$$y = [c_1 \sin(\frac{x}{2}) + c_2 \cos(\frac{x}{2})]e^{-\frac{x}{2}}.$$

3. Equations différentielles du second ordre

3.3. Equations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants avec second membre

Définition

Une équation différentielle linéaire du second ordre à coeficients constants avec second membre est une équation de la forme:

$$ay'' + by' + cy = g(x)$$

où a, b et c sont des constantes et $g(x)$ est le second ordre.

La résolution par la méthode de variation de la constante

La forme de la solution sans second membre

$$y_0(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

on déduit la forme de la solution générale avec second membre en considérant les constantes comme des fonctions de x.

3. Equations différentielles du second ordre

3.3. Equations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants avec second membre

La résolution par la méthode de variation de la constante

Posons

$$y(x) = SGEASM = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$$

où c_1 et c_2 sont désormais deux fonctions de x. Les fonctions c_1 et c_2 sont alors des solutions du système

$$\begin{cases} c_1'y_1 + c_2'y_2 = 0 \\ c_1'y_1' + c_2'y_2' = \frac{g(x)}{a} \end{cases} .$$

Le déterminant de ce système est le Wronskien qui est non nul (y_1 et y_2 sont deux solutions linéairement indépendantes). D'après Cramer, la solution est unique:

3. Equations différentielles du second ordre

3.3. Equations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants avec second membre

La résolution par la méthode de variation de la constante

$$\begin{cases} c_1' = \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ g(x)/a & y_2' \end{vmatrix}}{W(y_1,y_2)} = \dfrac{-1}{a}\dfrac{y_2 g(x)}{W(y_1,y_2)} \\ c_2' = \dfrac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & g(x)/a \end{vmatrix}}{W(y_1,y_2)} = \dfrac{1}{a}\dfrac{y_1 g(x)}{W(y_1,y_2)} \end{cases}$$

D'où

$$\Longrightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{-1}{a}\int \frac{y_2 g(x)}{W(y_1,y_2)}dx \\ c_2 = \frac{1}{a}\int \frac{y_1 g(x)}{W(y_1,y_2)}dx \end{cases}.$$

3. Equations différentielles du second ordre

3.3. Equations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants avec second membre

Exemple

Résoudre l'équation différentielle linéaire du second ordre avec second membre

$$y'' - 5y' + 6y = e^x.$$

- **Recherche la SGESSM $\mathbf{y}_0$** : L'équation caractèristique:

$$r^2 - 5r + 6 = 0 \Longleftrightarrow r_1 = 2, r_2 = 3$$

$$\Longrightarrow y_0 = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}, c_{1,2} \in \mathbb{R}.$$

- **Recherche de SGEASM $\mathbf{y}$** : En posant $y = c_1(x)e^{2x} + c_2(x)e^{3x}$ avec $y_1(x) = e^{2x}, y_2(x) = e^{3x}$ alors

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0 \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' = \frac{g(x)}{a} \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0 \\ 2c_1' e^{2x} + 3c_2' e^{3x} = e^x \end{array} \right. .$$

3. Equations différentielles du second ordre

3.3. Equations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants avec second membre

Exemple

En utilisant la méthode de Cramer

$$\begin{cases} c_1' = \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & e^{3x} \\ e^x & 3e^{3x} \end{vmatrix}}{W(y_1,y_2)} = \dfrac{-e^{4x}}{e^{5x}} = e^{-x} \\ c_2' = \dfrac{\begin{vmatrix} e^{2x} & 0 \\ 2e^{2x} & e^x \end{vmatrix}}{W(y_1,y_2)} = \dfrac{e^{3x}}{e^{5x}} = e^{-2x} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} c_1 = e^{-x} + k_1 \\ c_2 = -\frac{1}{2}e^{-2x} + k_2 \end{cases}.$$

Alors

$$y = (e^{-x} + k_1)e^{2x} + (-\frac{1}{2}e^{-2x} + k_2)e^{3x}$$

$$y = \underbrace{k_1e^{2x} + k_2e^{3x}}_{y_0} + \underbrace{\frac{e^x}{2}}_{Y}.$$

S. Bénazth, et als. Biomathématiques, Analyse, Algebre, probabilités, statistiques. Masson, Paris, 2001.