Cours de Biomathématiques-Biostatistiques

$1^{ère}$ année Pharmacie 2020/2021

Dr. M. Hamamda

- Dans la pratique, il arrive très souvent qu'une grandeur étudiée dépende de plusieurs variables simultanément.

- Dans la pratique, il arrive très souvent qu'une grandeur étudiée dépende de plusieurs variables simultanément.
- Les fonctions à une variable traitées dans le premier chapitre ne sont alors pas adaptées à la modélisation des variations de ces grandeurs.

- Dans la pratique, il arrive très souvent qu'une grandeur étudiée dépende de plusieurs variables simultanément.
- Les fonctions à une variable traitées dans le premier chapitre ne sont alors pas adaptées à la modélisation des variations de ces grandeurs.
- Il devient nécessaire d'introduire les fonctions à plusieurs variables.

Définition d'une fonction à plusieurs variables

Définition

Une application définie sur un sous ensemble de $\mathbb{R}^n$ et prenant des valeurs réelles est appelée **fonction à n variables**:

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}, \forall x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Exemple

La pression P d'un gaz parfait est une fonction de trois variables, sa température T, son volume V et le nombre de moles N :

$$P(N, V, T) = \frac{NRT}{V}, R = cte.$$

Définition d'une fonction à plusieurs variables

Définition

Soit f une fonction à plusieurs variables. Si l'on fixe toutes les variables de f à des valeurs constantes sauf une, on obtient une fonction à une seule variable, appelée **application partielle**.

Exemple

Si on fixe le volume V et le nombre des moles N à des valeurs constantes ($V = V_0, N = N_0$), la pression P d'un gaz parfait dépend uniquement d'une seule variable c'est la température T

$$P(T) = \frac{N_0 RT}{V_0}, R, V_0, N_0 = cte.$$

Continuité

Définition

- Une fonction f à n variables est dite continue en $x_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ si et seulement si: $\forall x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ et $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta(\varepsilon)$ tel que:

$$\left.\begin{array}{c} \left|x - x_1^0\right| < \eta(\varepsilon) \\ \left|x - x_2^0\right| < \eta(\varepsilon) \\ .... \\ \left|x - x_n^0\right| < \eta(\varepsilon) \end{array}\right\} \Longrightarrow \left|f(x_1, x_2, ..., x_n) - f(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)\right| < \varepsilon.$$

Continuité

Définition

- Une fonction f à n variables est dite continue en $x_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ si et seulement si: $\forall x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ et $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta(\varepsilon)$ tel que:

$$\left.\begin{array}{c} \left|x - x_1^0\right| < \eta(\varepsilon) \\ \left|x - x_2^0\right| < \eta(\varepsilon) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \left|x - x_n^0\right| < \eta(\varepsilon) \end{array}\right\} \Longrightarrow \left|f(x_1, x_2, ..., x_n) - f(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)\right| < \varepsilon.$$

- On écrit $\lim\limits_{x \to x_0} f(x_1, x_2, ..., x_n) = f(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0).$

Continuité

- Si la fonction est continue en chaque point d'un sous ensemble E de $\mathbb{R}^2$ on dit qu'elle est continue sur E.

Continuité

- Si la fonction est continue en chaque point d'un sous ensemble E de $\mathbb{R}^2$ on dit qu'elle est continue sur E.

- Si f et g sont deux fonctions à n variables continues en x_0, alors:

Continuité

- Si la fonction est continue en chaque point d'un sous ensemble E de $\mathbb{R}^2$ on dit qu'elle est continue sur E.
- Si f et g sont deux fonctions à n variables continues en x_0, alors:
  - $f + g$ est continue en x_0

Continuité

- Si la fonction est continue en chaque point d'un sous ensemble E de $\mathbb{R}^2$ on dit qu'elle est continue sur E.

- Si f et g sont deux fonctions à n variables continues en x_0, alors:

  - $f+g$ est continue en x_0
  - $f.g$ est continue en x_0

Continuité

- Si la fonction est continue en chaque point d'un sous ensemble E de $\mathbb{R}^2$ on dit qu'elle est continue sur E.

- Si f et g sont deux fonctions à n variables continues en x_0, alors:
  - $f + g$ est continue en x_0
  - $f.g$ est continue en x_0
  - f/g est continue en x_0 si $g(x_0) \neq 0$.

Dérivées partielles

Dérivées partielles du premier ordre

Définition

Soit une fonction f à n variables et l'application partielle obtenue en fixant toutes les variables sauf x_k à des constantes $(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$. La dérivée (si elle existe) de l'application partielle au point x_k^0 définie par:

$$\lim_{x_k \to x_k^0} \frac{f(x_1^0, x_2^0, ..., x_k, ..., x_n^0) - f(x_1^0, x_2^0, ..., x_k^0, ..., x_n^0)}{x_k - x_k^0}$$

est appelée **dérivée partielle** de f au point $x_0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ notée

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0).$$

Dérivées partielles

Dérivées partielles du premier ordre

Proposition

- Une fonction à n variables admet n dérivées partielles du premier ordre par rapport à $x_1, x_2, ..., x_n$.
- On note $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ la dérivée partielle de f par rapport à x_k.
- Les règles de dérivation des fonctions à une variable s'appliquent aussi aux dérivées partielles. Plus particulièrement on a:
  1. $\frac{\partial c}{\partial x_k} = 0, \forall k$ (où $c = cte$)
  2. $\frac{\partial x_k}{\partial x_k} = 1, \forall k$
  3. $\frac{\partial x_k}{\partial x_l} = 0, \forall (k,l)$ avec $k \neq l$.

Dérivées partielles

Dérivées partielles du premier ordre

Exemple

- Trouver les dérivées partielles d'ordre 1 par rapport à T et par rapport à V de la pression P d'un gaz parfait $P(T,N,V)=\frac{NRT}{V}$.

Dérivées partielles

Dérivées partielles du premier ordre

Exemple

- Trouver les dérivées partielles d'ordre 1 par rapport à T et par rapport à V de la pression P d'un gaz parfait $P(T, N, V) = \frac{NRT}{V}$.
- On calcule la dérivée partielle par rapport à T en considérant N et V comme des constantes:

$$\frac{\partial P}{\partial T} = \frac{NR}{V}.$$

Dérivées partielles
Dérivées partielles du premier ordre

Exemple

- Trouver les dérivées partielles d'ordre 1 par rapport à T et par rapport à V de la pression P d'un gaz parfait $P(T,N,V) = \frac{NRT}{V}$.
- On calcule la dérivée partielle par rapport à T en considérant N et V comme des constantes:

$$\frac{\partial P}{\partial T} = \frac{NR}{V}.$$

- De la même manière on calcule

$$\frac{\partial P}{\partial V} = \frac{-NRT}{V^2}.$$

Dérivées partielles
Dérivées partielles d'ordre supérieur

Définition

- La dérivée partielle de premier ordre d'une fonction f à n variables est aussi une fonction à n variables.

Dérivées partielles

Dérivées partielles d'ordre supérieur

Définition

- La dérivée partielle de premier ordre d'une fonction f à n variables est aussi une fonction à n variables.
- Si les dérivées partielles de $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ par rapport à ces variables existent, ces dérivées sont appelées dérivées partielles de second ordre de la fonction f et sont notées:

Dérivées partielles

Dérivées partielles d'ordre supérieur

Définition

- La dérivée partielle de premier ordre d'une fonction f à n variables est aussi une fonction à n variables.
- Si les dérivées partielles de $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ par rapport à ces variables existent, ces dérivées sont appelées dérivées partielles de second ordre de la fonction f et sont notées:
    - $\frac{\partial}{\partial x_l}(\frac{\partial f}{\partial x_k}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_l \partial x_k}, k \neq l$ (dérivée mixte)

Dérivées partielles

Dérivées partielles d'ordre supérieur

Définition

- La dérivée partielle de premier ordre d'une fonction f à n variables est aussi une fonction à n variables.
- Si les dérivées partielles de $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ par rapport à ces variables existent, ces dérivées sont appelées dérivées partielles de second ordre de la fonction f et sont notées:
  - $\frac{\partial}{\partial x_l}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_l \partial x_k}, k \neq l$ (dérivée mixte)
  - $\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}$.

Dérivées partielles

Dérivées partielles d'ordre supérieur

Exemple

- Trouver la dérivée partielle d'ordre 2 par rapport à V et la dérivée mixte d'ordre 2 par rapport à V et T de la pression P d'un gaz parfait.

$$\frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right) = \frac{-NR}{V^2}.$$

Dérivées partielles
Dérivées partielles d'ordre supérieur

Exemple

- Trouver la dérivée partielle d'ordre 2 par rapport à V et la dérivée mixte d'ordre 2 par rapport à V et T de la pression P d'un gaz parfait.
- On a calculé $\frac{\partial P}{\partial V} = \frac{-NRT}{V^2}$ et $\frac{\partial P}{\partial T} = \frac{NR}{V}$.

$$\frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right) = \frac{-NR}{V^2}.$$

Dérivées partielles
Dérivées partielles d'ordre supérieur

Exemple

- Trouver la dérivée partielle d'ordre 2 par rapport à V et la dérivée mixte d'ordre 2 par rapport à V et T de la pression P d'un gaz parfait.
- On a calculé $\frac{\partial P}{\partial V} = \frac{-NRT}{V^2}$ et $\frac{\partial P}{\partial T} = \frac{NR}{V}$.
- Alors, on a:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial V^2} = \frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{-NRT}{V^2}\right) = \frac{2NRT}{V^3}$$

$$\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right) = \frac{-NR}{V^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right) = \frac{-NR}{V^2}.$$

Dérivées partielles

Dérivées partielles d'ordre supérieur

Théorème de Schwartz

1. Soit f une fonction de deux variables x et y.
2. Si les dérivées partielles mixtes de second ordre existent et sont continues, alors:
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$
3. On écrit
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Dérivées partielles

Extrema d'une fonction à deux variables

Définition

On appelle **matrice hessienne** en un point (x_0, y_0) d'une fonction f à deux variables , la matrice

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}.$$

Dérivées partielles

Extrema d'une fonction à deux variables

Théorème

Soit f une fonction à deux variables x et y. Si:

1. f admet un extremum local en un point (x_0, y_0).
2. f est dérivable par rapport à x et par rapport à y en x_0 et en y_0.

Alors:

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0.$$

Dérivées partielles

Extrema d'une fonction à deux variables

Proposition (extremum: maximum ou minimum?

- Soit f une fonction dérivable deux fois.
- Notons Δ le déterminant de la matrice hessienne:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2} \end{vmatrix}.$$

Alors:

1. Si $\Delta > 0$ et $r = \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2} > 0 \Longrightarrow (x_0, y_0)$ est un minimum.
2. Si $\Delta > 0$ et $r = \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2} < 0 \Longrightarrow (x_0, y_0)$ est un maximum.
3. Si $\Delta < 0 \Longrightarrow (x_0, y_0)$ est un point selle (pas d'extremum).
4. Si $\Delta = 0 \Longrightarrow$ cas indéterminé.

Dérivées partielles

Extrema d'une fonction à deux variables

Exemple

- Soit la fonction $f(x,y) = ax^2 + by^2$ où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
- On a: $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2ax = 0 \Longrightarrow x = 0$ et $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 2by = 0 \Longrightarrow y = 0$.
- alors $(0,0)$ est un extremum.
- Le déterminant $\Delta = rt - s^2 = 4ab$.
- D'où:
  - Si a et b sont positifs, alors $r > 0$ et $\Delta > 0 \Longrightarrow$ le point $(0,0)$ est un minimum.

Dérivées partielles

Extrema d'une fonction à deux variables

Exemple

- Soit la fonction $f(x, y) = ax^2 + by^2$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
- On a: $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2ax = 0 \Longrightarrow x = 0$ et $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 2by = 0 \Longrightarrow y = 0$.
- alors $(0, 0)$ est un extremum.
- Le déterminant $\Delta = rt - s^2 = 4ab$.
- D'où:
  - Si a et b sont positifs, alors $r > 0$ et $\Delta > 0 \Longrightarrow$ le point $(0, 0)$ est un minimum.
  - Si a et b sont négatifs, alors $r < 0$ et $\Delta > 0 \Longrightarrow$ le point $(0, 0)$ est un maximum.

Dérivées partielles
Extrema d'une fonction à deux variables

Exemple

- Soit la fonction $f(x,y) = ax^2 + by^2$ où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
- On a: $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2ax = 0 \Longrightarrow x = 0$ et $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 2by = 0 \Longrightarrow y = 0$.
- alors $(0,0)$ est un extremum.
- Le déterminant $\Delta = rt - s^2 = 4ab$.
- D'où:
  - Si a et b sont positifs, alors $r > 0$ et $\Delta > 0 \Longrightarrow$ le point $(0,0)$ est un minimum.
  - Si a et b sont négatifs, alors $r < 0$ et $\Delta > 0 \Longrightarrow$ le point $(0,0)$ est un maximum.
  - Si a et b sont de signes contraires, alors $\Delta < 0 \Longrightarrow$ il n'existe pas d'extremum.

La différentielle

Définition

On appelle **différentielle partielle** par rapport à x_k d'une fonction f à n variables, l'expression

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k$$

La différentielle

Définition

On appelle **différentielle** (en physique **différentielle totale** ou **différentielle exacte**) d'une fonction f à n variables:

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

La différentielle

Exemple

La pression P d'un gaz parfait est donnée par

$$P(T, N, V) = \frac{NRT}{V}.$$

La différentielle dP est

$$\begin{aligned} dP &= \frac{\partial P}{\partial V} dV + \frac{\partial P}{\partial T} dT + \frac{\partial P}{\partial N} dN \\ &= \frac{-NRT}{V^2} dV + \frac{NR}{V} dT + \frac{RT}{V} dN. \end{aligned}$$

La différentielle

Théorème

1. Pour qu'une fonction f à n variables soit **différentiable** en un point
$$x_0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0),$$
il suffit que ses dérivées partielles du premier ordre existent et soient continues en x_0.
2. Une telle fonction f est appelée **régulière**.

Calcul d'erreur

Erreur absolu

- Une des principales applications des différentielles totales est le calcul de propagation d'erreur.
- Il s'agit de déterminer l'erreur maximale d'un résultat de calcul faisant intervenir des paramètres expérimentaux imprécis.

Théorème

Soit f une fonction à n variables, régulière au point $x_0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ avec chaque x_i^0 affecté d'une erreur Δx_i. L'erreur Δf induite par l'imprécision sur les x_i^0 peut être estimée par

$$|\Delta f| \leq \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \right| \Delta x_i^0$$

Calcul d'erreur

Erreur absolu

Exemple

1. Calculer le nombre de moles contenues dans un gaz parfait maintenu dans un récipient qui mesure $1L$ avec une précision de 0.5%, à une pression $P = 1atm$.
2. Déterminée avec une précision de 1% et thermostaté à $300K$ par un thermostat pouvant être réglé au $1/10$ de degré près.
3. On donne $R = 0.08205 atm L mol^{-1} K^{-1}$.

La solution:

- Le nombre de moles N est donné par

$$N = \frac{PV}{RT} = \frac{1 \times 1}{0.08205 \times 300} = 0.0406256 mol.$$

Calcul d'erreur

Erreur absolu

- On calcule la différentielle

$$\begin{aligned} dN &= \frac{\partial N}{\partial P}dP + \frac{\partial N}{\partial V}dV + \frac{\partial N}{\partial T}dT \\ &= \frac{V}{RT}dP + \frac{P}{RT}dV - \frac{PV}{RT^2}dT. \end{aligned}$$

- Application numérique

$$\begin{aligned} \Delta N &\leq \left|\frac{V}{RT}\right|\Delta P + \left|\frac{P}{RT}\right|\Delta V + \left|-\frac{PV}{RT^2}\right|\Delta T \\ &\leq 0.000622926 mol. \end{aligned}$$

- Alors

$$N = (0.0406 \pm 0.0006) mol$$

- La précision est d'environ 1.5%.

Calcul d'erreur

Erreur relative et différentielle logarithmique

Caalcul d'erreur relative

Le calcul de l'erreur relative $\frac{\Delta f}{f}$ est obtenu facilement par le calcul de la différentielle logarithmique

$$d \ln |f| = \frac{df}{f}.$$

Exemple

- Nous allons refaire le calcule en utilisant la différentielle logarithmique

$$\begin{aligned} \ln N &= \ln \frac{PV}{RT} \\ &= \ln P + \ln V - \ln R - \ln T. \end{aligned}$$

Calcul d'erreur

Erreur relative et différentielle logarithmique

Caalcul d'erreur relative

Le calcul de l'erreur relative $\frac{\Delta f}{f}$ est obtenu facilement par le calcul de la différentielle logarithmique

$$d \ln |f| = \frac{df}{f}.$$

Exemple

- Nous allons refaire le calcule en utilisant la différentielle logarithmique

$$\begin{aligned} \ln N &= \ln \frac{PV}{RT} \\ &= \ln P + \ln V - \ln R - \ln T. \end{aligned}$$

- Alors

Calcul d'erreur

Erreur absolu

Exemple

-
$$
\begin{aligned}
\frac{\Delta N}{N} &= \left|\frac{1}{P}\right|\Delta P + \left|\frac{1}{V}\right|\Delta V + \left|-\frac{1}{T}\right|\Delta T \\
&= 0.01 + 0.005 + \frac{0.1}{300} \\
&= 0.015 \\
&= 1.5\%
\end{aligned}
$$

Calcul d'erreur

Erreur absolu

Exemple

- $$\begin{aligned} \frac{\Delta N}{N} &= \left|\frac{1}{P}\right| \Delta P + \left|\frac{1}{V}\right| \Delta V + \left|-\frac{1}{T}\right| \Delta T \\ &= 0.01 + 0.005 + \frac{0.1}{300} \\ &= 0.015 \\ &= 1.5\% \end{aligned}$$
- On remarque qu'on a trouvé le même résultat, mais avec un moyen plus simple.

S. Bénazth, et als. Biomathématiques, Analyse, Algebre, probabilités, statistiques. Masson, Paris, 2001.