Cours de Biomathématiques-Biostatistiques

$1^{ère}$ année Pharmacie 2020/2021

Dr. M. Hamamda

Biomathématique

1. **La biomathématique sous-entend l'association de deux sciences: la biologie et les mathématiques.**

Biomathématique

1. **La biomathématique sous-entend l'association de deux sciences: la biologie et les mathématiques.**

2. **De façon précise, les biomathématiques sont constituées par l'ensemble des méthodes et techniques mathématiques, numériques et informatiques qui permettent d'étudier et de modéliser les phénomènes et processus biologiques.**

Introduction

Dans ce chapitre, nous allons donner une présentation générale de l'étude d'une fonction réelle à une variable réelle, nous allons aussi introduire les notions:

- **Limite**

Introduction

Dans ce chapitre, nous allons donner une présentation générale de l'étude d'une fonction réelle à une variable réelle, nous allons aussi introduire les notions:

- **Limite**
- **Continuité**

Introduction

Dans ce chapitre, nous allons donner une présentation générale de l'étude d'une fonction réelle à une variable réelle, nous allons aussi introduire les notions:

- **Limite**
- **Continuité**
- **Dérivabilité...**

1. Notions de fonction

Définition

- Soit E une partie non vide de $\mathbb{R}$ ($\emptyset \neq E \subset \mathbb{R}$), où $\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réelles. On appelle fonction d'une variable réelle à valeurs réelles toute application

$$f: \begin{array}{l} E \to \mathbb{R} \\ x \to f(x). \end{array}$$

1. Notions de fonction

Définition

- Soit E une partie non vide de $\mathbb{R}$ ($\varnothing \neq E \subset \mathbb{R}$), où $\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réelles. On appelle fonction d'une variable réelle à valeurs réelles toute application

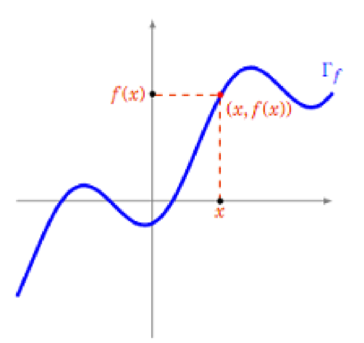
$$f: \begin{array}{l} E \to \mathbb{R} \\ x \to f(x). \end{array}$$

- On appelle E le domaine de définition de la fonction f.

1. Notions de fonction

Graphe d'une fonction

Le graphe d'une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ est la partie Γ_f de $\mathbb{R}^2$ définie par $\Gamma_f = \{(x, f(x))/x \in E\}$



1. Notions de fonction

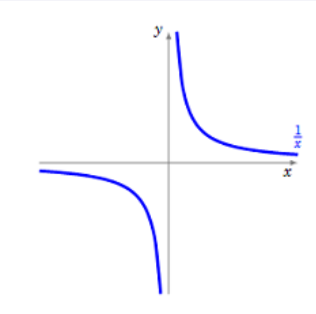
Exemple

- La fonction inverse $f: \begin{array}{rcl}]-\infty, 0[\,\cup\,]0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \to & \frac{1}{x} \end{array}$

1. Notions de fonction

Exemple

- La fonction inverse $f: \begin{array}{l}]-\infty,0[\cup]0,+\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ \hfill x \rightarrow \frac{1}{x} \end{array}$
- Le graphe de cette fonction est donné par la figure



1.1. Parité et périodicité

Soit f une fonction définie sur $I \subset \mathbb{R}, f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (I est symétrique par rapport à l'origine 0)

Fonction paire

- La fonction f est dite paire si $f(-x) = f(x), \forall x \in I$.

Exemple

Les fonctions: $x \to x^2, x \to \cos(x)$ sont paires.

1.1. Parité et périodicité

Soit f une fonction définie sur $I \subset \mathbb{R}$, $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (I est symétrique par rapport à l'origine 0)

Fonction paire

- La fonction f est dite paire si $f(-x) = f(x), \forall x \in I$.
- Graphiquement, f est paire si et seulement si son graphe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Exemple

Les fonctions: $x \to x^2, x \to \cos(x)$ sont paires.

1.1. Parité et périodicité

Fonction impaire

- La fonction f est dite impaire si $f(-x) = -f(x), \forall x \in I$.

Exemple

Les fonctions: $x \to x^3, x \to \tan(x)$ sont impaires.

1.1. Parité et périodicité

Fonction impaire

- La fonction f est dite impaire si $f(-x) = -f(x), \forall x \in I$.
- Graphiquement, f est impaire si et seulement si son graphe est symétrique par rapport à l'origine.

Exemple

Les fonctions: $x \to x^3, x \to \tan(x)$ sont impaires.

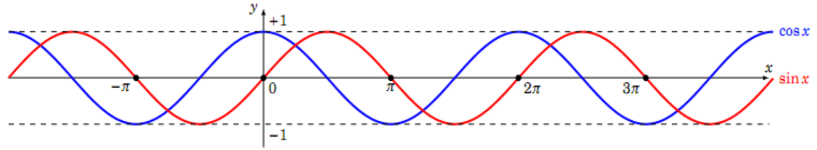
1.1. Parité et périodicité

Fonction périodique

- La fonction f est dite périodique s'il existe $T > 0$ telque $f(x+T) = f(x)$.

Exemple

Les fonctions $\cos x$ et $\sin x$ sont 2π-périodiques



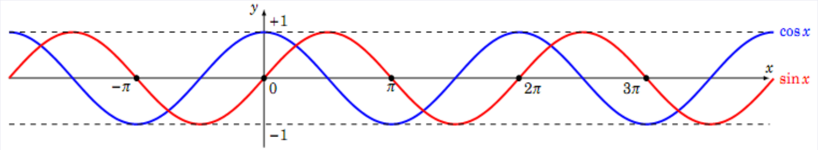
1.1. Parité et périodicité

Fonction périodique

- La fonction f est dite périodique s'il existe $T > 0$ telque $f(x+T) = f(x)$.
- Graphiquement, f est périodique de période T si et seulement si son graphe est invariant par la translation de vecteur $T\overrightarrow{i}$, où $\overrightarrow{i}$ est le premier vecteur de coordonnées.

Exemple

Les fonctions $\cos x$ et $\sin x$ sont 2π-périodiques



1.2. Fonction monotone

Soit $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

- f est dite croissante (resp. strictement croissante) sur E si:

$$\forall (x, y) \in E^2 : x \leq y \Longrightarrow f(x) \leq f(y)$$

$$(resp.\ \forall (x, y) \in E^2 : x < y \Longrightarrow f(x) < f(y)).$$

1.2. Fonction monotone

Soit $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

- f est dite croissante (resp. strictement croissante) sur E si:

$$\forall (x,y) \in E^2 : x \leq y \Longrightarrow f(x) \leq f(y)$$

$$(resp.\ \forall (x,y) \in E^2 : x < y \Longrightarrow f(x) < f(y)).$$

- f est dite décroissante (resp. strictement décroissante) sur E si:

$$\forall (x,y) \in E^2 : x \leq y \Longrightarrow f(x) \geq f(y)$$

$$(resp.\ \forall (x,y) \in E^2 : x < y \Longrightarrow f(x) > f(y)).$$

1.2. Fonction monotone

Soit $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

- f est dite croissante (resp. strictement croissante) sur E si:

$$\forall (x,y) \in E^2 : x \leq y \Longrightarrow f(x) \leq f(y)$$

$$(resp.\ \forall (x,y) \in E^2 : x < y \Longrightarrow f(x) < f(y)).$$

- f est dite décroissante (resp. strictement décroissante) sur E si:

$$\forall (x,y) \in E^2 : x \leq y \Longrightarrow f(x) \geq f(y)$$

$$(resp.\ \forall (x,y) \in E^2 : x < y \Longrightarrow f(x) > f(y)).$$

- f est monotone (resp. strictement monotone) sur E si elle est croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou strictement décroissante)

1.3. Injection, surjection, bijection et fonction réciproque

Définition

Soit $f : E \to F$ une fonction, où E et F sont deux parties de $\mathbb{R}$.

- f est injective si $\forall x, x' \in E, f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x'$.

1.3. Injection, surjection, bijection et fonction réciproque

Définition

Soit $f : E \to F$ une fonction, où E et F sont deux parties de $\mathbb{R}$.

- f est injective si $\forall x, x' \in E, f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x'$.
- f est surjective si $\forall y \in F, \exists x \in E : y = f(x)$.

1.3. Injection, surjection, bijection et fonction réciproque

Définition

Soit $f : E \to F$ une fonction, où E et F sont deux parties de $\mathbb{R}$.

- f est injective si $\forall x, x' \in E, f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x'$.
- f est surjective si $\forall y \in F, \exists x \in E : y = f(x)$.
- f est bijective si elle est à la fois injective et surjective, c-à-d: $\forall y \in F, \exists ! x \in E : y = f(x)$.

1.3. Injection, surjection, bijection et fonction réciproque

Proposition

- Si $f : E \rightarrow F$ est une fonction bijective alors il existe une unique application $g : F \rightarrow E$ telle que

$$g \circ f = Id_E$$

et

$$f \circ g = Id_F$$

1.3. Injection, surjection, bijection et fonction réciproque

Proposition

- Si $f : E \to F$ est une fonction bijective alors il existe une unique application $g : F \to E$ telle que
$$g \circ f = Id_E$$
et
$$f \circ g = Id_F$$
- La fonction g est la bijection réciproque de f notée f^{-1}.

2.1. Limite d'une fonction

Soit $f : E \to \mathbb{R}$ ($E \subset \mathbb{R}$). Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ un point de E, $l \in \mathbb{R}$.

Limite en un point

- On dit que f a pour limite l en x_0 si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in E : |x - x_0| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

2.1. Limite d'une fonction

Soit $f : E \to \mathbb{R}$ ($E \subset \mathbb{R}$). Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ un point de E, $l \in \mathbb{R}$.

Limite en un point

- On dit que f a pour limite l en x_0 si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in E : |x - x_0| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

- On dit aussi que f tend vers l lorsque x tend vers x_0.

2.1. Limite d'une fonction

Soit $f : E \to \mathbb{R}$ ($E \subset \mathbb{R}$). Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ un point de E, $l \in \mathbb{R}$.

Limite en un point

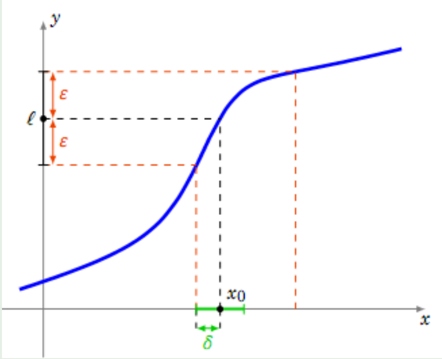
- On dit que f a pour limite l en x_0 si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in E : |x - x_0| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

- On dit aussi que f tend vers l lorsque x tend vers x_0.
- On note alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ ou bien $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} l$

2.1. Limite d'une fonction

Limite en un point



2.1. Limite d'une fonction

Remarque

De la même manière, on définit les limites:

- $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$

2.1. Limite d'une fonction

Remarque

De la même manière, on définit les limites:

- $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$

2.1. Limite d'une fonction

Remarque

De la même manière, on définit les limites:

- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = l.$

2.1. Limite d'une fonction

Remarque

De la même manière, on définit les limites:

- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = l.$
- $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \quad = \pm\infty$

2.2. Opérations sur les limites

Proposition

Soit $f, g : E \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = l_1$, $\lim_{x \longrightarrow x_0} g(x) = l_2$

1. $\lim_{x \longrightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = l_1 + l_2$

2.2. Opérations sur les limites

Proposition

Soit $f, g : E \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = l_1$, $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} g(x) = l_2$

1. $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = l_1 + l_2$
2. $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} \lambda f(x) = \lambda l$

2.2. Opérations sur les limites

Proposition

Soit $f, g : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l_1$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l_2$

1. $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = l_1 + l_2$
2. $\lim\limits_{x \to x_0} \lambda f(x) = \lambda l$
3. $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x).g(x)] = l_1.l_2$

2.2. Opérations sur les limites

Proposition

Soit $f, g : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l_1$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l_2$

1. $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = l_1 + l_2$
2. $\lim\limits_{x \to x_0} \lambda f(x) = \lambda l$
3. $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x).g(x)] = l_1.l_2$
4. $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2}$

2.2. Opérations sur les limites

Remarque

- Il y a des situations où l'on ne peut rien dire sur les limites. Par exemple si $\lim_{x \to x_0} f = +\infty$ et $\lim_{x \to x_0} g = -\infty$ alors on ne peut a priori rien dire sur la limite de $f + g$

Exemple

2.2. Opérations sur les limites

Remarque

- Il y a des situations où l'on ne peut rien dire sur les limites. Par exemple si $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f = +\infty$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} g = -\infty$ alors on ne peut a priori rien dire sur la limite de $f + g$
- Ces situations sont dites: formes indéterminées.

Exemple

2.2. Opérations sur les limites

Remarque

- Il y a des situations où l'on ne peut rien dire sur les limites. Par exemple si $\lim_{x \to x_0} f = +\infty$ et $\lim_{x \to x_0} g = -\infty$ alors on ne peut a priori rien dire sur la limite de $f + g$
- Ces situations sont dites: formes indéterminées.
- Les formes indéterminées F.I : $+\infty - \infty$ $\quad 0.\infty$ $\quad \frac{\infty}{\infty}$ $\quad \frac{0}{0}$ 1^∞ et ∞^0.

Exemple

2.2. Opérations sur les limites

Remarque

- Il y a des situations où l'on ne peut rien dire sur les limites. Par exemple si $\lim_{x \to x_0} f = +\infty$ et $\lim_{x \to x_0} g = -\infty$ alors on ne peut a priori rien dire sur la limite de $f + g$
- Ces situations sont dites: formes indéterminées.
- Les formes indéterminées F.I : $+\infty - \infty$ $\quad 0.\infty$ $\quad \frac{\infty}{\infty}$ $\quad \frac{0}{0}$ 1^{∞} et ∞^0.

Exemple

- $\lim_{x \to a} \frac{x^2 - a^2}{x^3 - a^3} = \frac{0}{0}$ (F.I)

2.2. Opérations sur les limites

Remarque

- Il y a des situations où l'on ne peut rien dire sur les limites. Par exemple si $\lim_{x \to x_0} f = +\infty$ et $\lim_{x \to x_0} g = -\infty$ alors on ne peut a priori rien dire sur la limite de $f + g$
- Ces situations sont dites: formes indéterminées.
- Les formes indéterminées F.I : $+\infty - \infty$ $0.\infty$ $\frac{\infty}{\infty}$ $\frac{0}{0}$ 1^{∞} et ∞^{0}.

Exemple

- $\lim_{x \to a} \frac{x^2 - a^2}{x^3 - a^3} = \frac{0}{0}$ (F.I)
- $\lim_{x \to a} \frac{x^2 - a^2}{x^3 - a^3} = \lim_{x \to a} \frac{(x-a)(x+a)}{(x-a)(x^2+ax+a^2)} = \frac{2}{3a}$.

3.1. Continuité en un point

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

Définition

- On dit que f est continue en un point $x_0 \in I$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I : |x - x_0| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

3.1. Continuité en un point

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

Définition

- On dit que f est continue en un point $x_0 \in I$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I : |x - x_0| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

- Autrement dit: si f admet une limite en x_0 alors

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

3.1. Continuité en un point

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

Définition

- On dit que f est continue en un point $x_0 \in I$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I : |x - x_0| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

- Autrement dit: si f admet une limite en x_0 alors

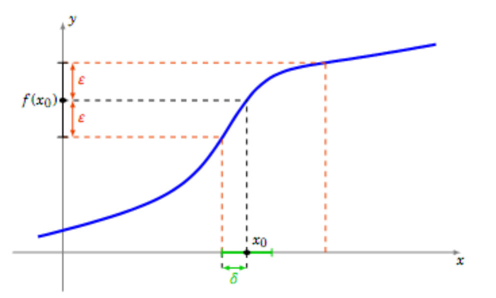
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

- On dit que f est continue sur l'intervalle I si elle est continue en tout point de I.

3.1. Continuité en un point

- Intuitivement, une fonction est continue sur un intervalle, si on peut tracer son graphe « **sans lever le crayon** », c'est-à-dire si elle n'a pas de **saut**.

3.1. Continuité en un point

- Intuitivement, une fonction est continue sur un intervalle, si on peut tracer son graphe « **sans lever le crayon** », c'est-à-dire si elle n'a pas de **saut**.
- 

3.1. Continuité en un point

Exemple

Les fonctions suivantes sont continues:

- Une fonction constante sur un intervalle.

3.1. Continuité en un point

Exemple

Les fonctions suivantes sont continues:

- Une fonction constante sur un intervalle.
- La fonction racine carrée $x \to \sqrt{x}$ sur $[0, +\infty[$.

3.1. Continuité en un point

Exemple

Les fonctions suivantes sont continues:

- Une fonction constante sur un intervalle.
- La fonction racine carrée $x \to \sqrt{x}$ sur $[0, +\infty[$.
- Les fonction $\sin x$ et $\cos x$ sur $\mathbb{R}$.

3.1. Continuité en un point

Exemple

Les fonctions suivantes sont continues:

- Une fonction constante sur un intervalle.
- La fonction racine carrée $x \to \sqrt{x}$ sur $[0, +\infty[$.
- Les fonction $\sin x$ et $\cos x$ sur $\mathbb{R}$.
- La fonction valeur absolue $x \to |x|$ sur $\mathbb{R}$.

3.1. Continuité en un point

Exemple

Les fonctions suivantes sont continues:

- Une fonction constante sur un intervalle.
- La fonction racine carrée $x \to \sqrt{x}$ sur $[0, +\infty[$.
- Les fonction $\sin x$ et $\cos x$ sur $\mathbb{R}$.
- La fonction valeur absolue $x \to |x|$ sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $\exp x$ sur $\mathbb{R}$.

3.1. Continuité en un point

Exemple

Les fonctions suivantes sont continues:

- Une fonction constante sur un intervalle.
- La fonction racine carrée $x \to \sqrt{x}$ sur $[0, +\infty[$.
- Les fonction $\sin x$ et $\cos x$ sur $\mathbb{R}$.
- La fonction valeur absolue $x \to |x|$ sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $\exp x$ sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $\ln x$ sur $]0, +\infty[$.

3.2. Opérations sur les fonctions continues

Proposition

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues en un point $x_0 \in I$. Alors

- $\lambda.f$ est continue en x_0 (pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$).

3.2. Opérations sur les fonctions continues

Proposition

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues en un point $x_0 \in I$. Alors

- $\lambda.f$ est continue en x_0 (pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$).
- $f + g$ est continue en x_0.

3.2. Opérations sur les fonctions continues

Proposition

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues en un point $x_0 \in I$. Alors

- $\lambda . f$ est continue en x_0 (pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$).
- $f + g$ est continue en x_0.
- $f \times g$ est continue en x_0.

3.2. Opérations sur les fonctions continues

Proposition

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues en un point $x_0 \in I$. Alors

- $\lambda.f$ est continue en x_0 (pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$).
- $f + g$ est continue en x_0.
- $f \times g$ est continue en x_0.
- Si $f \neq 0$, alors $\frac{1}{f}$ est continue en x_0.

4.1. Dérivée d'une fonction

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit $x_0 \in I$

Définition

- f est **dérivable** en x_0 si le **taux d'accroissement** $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ a une **limite finie** lorsque x tend vers x_0. La limite s'appelle alors **le nombre dérivé** de f en x_0 et est noté $f'(x_0)$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

4.1. Dérivée d'une fonction

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit $x_0 \in I$

Définition

- f est **dérivable** en x_0 si le **taux d'accroissement** $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ a une **limite finie** lorsque x tend vers x_0. La limite s'appelle alors **le nombre dérivé** de f en x_0 et est noté $f'(x_0)$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

- f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout point x_0 de I. La fonction $x \to f'(x)$ est **la fonction dérivée** de f, notée f' ou $\frac{df}{dx}$.

4.1. Dérivée d'une fonction

Exemple

La fonction définie par $f(x) = x^2$ est dérivable en tout point x_0 de $\mathbb{R}$. En effet:

$$\begin{aligned}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} &= \frac{x^2-x_0^2}{x-x_0}\\ &= \frac{(x-x_0)(x+x_0)}{x-x_0}\\ &= x+x_0\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 2x_0.$$

On a même montré que le nombre dérivé de f en x_0 est $2x_0$, autrement dit: $f'(x) = 2x$.

4.1. Dérivée d'une fonction

Proposition

Soit I un intervalle ouvert, $x_0 \in I$ et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

- Si f est dérivable en x_0, alors elle est continue en x_0.

Remarque

La réciproque est fausse: par exemple, la fonction valeur absolue $x \to |x|$ est continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0.

4.1. Dérivée d'une fonction

Proposition

Soit I un intervalle ouvert, $x_0 \in I$ et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

- Si f est dérivable en x_0, alors elle est continue en x_0.
- Si f est dérivable sur I, alors elle est continue sur I.

Remarque

La réciproque est fausse: par exemple, la fonction valeur absolue $x \to |x|$ est continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0.

4.2. Dérivée à droite et à gauche

Définition

- Si $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe et finie, on dit que f est **dérivable à droite** de x_0. On note alors **la dérivée à droite** par $f'_d(x_0)$.

4.2. Dérivée à droite et à gauche

Définition

- Si $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe et finie, on dit que f est **dérivable à droite** de x_0. On note alors **la dérivée à droite** par $f'_d(x_0)$.
- Si $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ <}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe et finie, on dit que f est **dérivable à gauche** de x_0. On note alors **la dérivée à gauche** par $f'_g(x_0)$.

4.2. Dérivée à droite et à gauche

Définition

- Si $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe et finie, on dit que f est **dérivable à droite** de x_0. On note alors **la dérivée à droite** par $f'_d(x_0)$.
- Si $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ <}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe et finie, on dit que f est **dérivable à gauche** de x_0. On note alors **la dérivée à gauche** par $f'_g(x_0)$.
- f est dérivable $\Longrightarrow f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.

4.3. Opérations sur les fonctions dérivables

Proposition

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur I. Alors pour tout $x \in I$:

- $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$,

Ou d'une manière plus facile à mémoriser $(f+g)' = f' + g', (\lambda f)' = \lambda f', (f \times g)' = f'g + fg', (\frac{1}{f})' = -\frac{f'}{f^2}, (\frac{f}{g})' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

4.3. Opérations sur les fonctions dérivables

Proposition

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur I. Alors pour tout $x \in I$:

- $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$,
- $(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$ où λ est un réel fixé,

Ou d'une manière plus facile à mémoriser $(f+g)' = f' + g', (\lambda f)' = \lambda f', (f \times g)' = f'g + fg', (\frac{1}{f})' = -\frac{f'}{f^2}, (\frac{f}{g})' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

4.3. Opérations sur les fonctions dérivables

Proposition

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur I. Alors pour tout $x \in I$:

- $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$,
- $(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$ où λ est un réel fixé,
- $(f \times g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$,

Ou d'une manière plus facile à mémoriser $(f+g)' = f' + g', (\lambda f)' = \lambda f', (f \times g)' = f'g + fg', (\frac{1}{f})' = -\frac{f'}{f^2}, (\frac{f}{g})' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

4.3. Opérations sur les fonctions dérivables

Proposition

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur I. Alors pour tout $x \in I$:

- $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$,
- $(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$ où λ est un réel fixé,
- $(f \times g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$,
- $(\frac{1}{f})'(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)^2}$ si $f(x) \neq 0$,

Ou d'une manière plus facile à mémoriser $(f+g)' = f' + g', (\lambda f)' = \lambda f', (f \times g)' = f'g + fg', (\frac{1}{f})' = -\frac{f'}{f^2}, (\frac{f}{g})' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

4.3. Opérations sur les fonctions dérivables

Proposition

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur I. Alors pour tout $x \in I$:

- $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$,
- $(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$ où λ est un réel fixé,
- $(f \times g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$,
- $(\frac{1}{f})'(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)^2}$ si $f(x) \neq 0$,
- $(\frac{f}{g})'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$ si $g(x) \neq 0$.

Ou d'une manière plus facile à mémoriser $(f+g)' = f' + g', (\lambda f)' = \lambda f', (f \times g)' = f'g + fg', (\frac{1}{f})' = -\frac{f'}{f^2}, (\frac{f}{g})' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

4.4. Dérivée de fonctions usuelles

Le tableau de gauche est un résumé des principales formules à connaître, x est une variable. Le tableau de droite est celui des compositions, u est une fonction $x \to u(x)$.

Fonction	**Dérivée**
x^n	$nx^{n-1} \quad (n \in \mathbb{Z})$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$
$\tan x$	$1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

Fonction	**Dérivée**
u^n	$nu'u^{n-1} \quad (n \in \mathbb{Z})$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\sqrt{u}$	$\frac{1}{2}\frac{u'}{\sqrt{u}}$
u^α	$\alpha u'u^{\alpha-1} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$
e^u	$u'e^u$
$\ln u$	$\frac{u'}{u}$
$\cos u$	$-u'\sin u$
$\sin u$	$u'\cos u$
$\tan u$	$u'(1+\tan^2 u) = \frac{u'}{\cos^2 u}$

4.5. Composition

Proposition

Si f est dérivable en x et g est dérivable en $f(x)$ alors $g \circ f$ est dérivable en x de dérivée:

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)).f'(x).$$

Corollaire

Soit I un intervalle ouvert, Soit $f : I \to J$ une fonction dérivable et bijective dont on note $f^{-1} : J \to I$ la bijection réciproque. Si f' ne s'annule pas sur I alors f^{-1} est dérivable et on a pour tout $x \in J$:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

4.6. Dérivées successives

Définition

- Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et soit f' sa dérivée.

4.6. Dérivées successives

Définition

- Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et soit f' sa dérivée.
- Si la fonction f' est aussi dérivable on note $f'' = (f')'$ la dérivée seconde de f.

4.6. Dérivées successives

Définition

- Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et soit f' sa dérivée.
- Si la fonction f' est aussi dérivable on note $f'' = (f')'$ la dérivée seconde de f.
- Plus généralement on note:

$$f^{(0)} = f, f^{(1)} = f', f^{(2)} = f'', f^{(3)} = f''', ..., f^{(n+1)} = (f^{(n)})'.$$

4.6. Dérivées successives

Définition

- Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et soit f' sa dérivée.
- Si la fonction f' est aussi dérivable on note $f'' = (f')'$ la dérivée seconde de f.
- Plus généralement on note:

$$f^{(0)} = f, f^{(1)} = f', f^{(2)} = f'', f^{(3)} = f''', ..., f^{(n+1)} = (f^{(n)})'.$$

- Si la dérivée $n^{ième}$ notée $f^{(n)}$ existe on dit que f est n fois dérivable.

4.6. Dérivées successives

Exemple

- Soit $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x - 1.$

4.6. Dérivées successives

Exemple

- Soit $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x - 1.$
- La fonction f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

4.6. Dérivées successives

Exemple

- Soit $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x - 1$.
- La fonction f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
- Alors:

$$f^{(1)}(x) = 4x^3 - 9x^2 + 2$$

$$f^{(2)}(x) = 12x^2 - 18x$$

$$f^{(3)}(x) = 24x - 18$$

$$f^{(4)}(x) = 24$$

$$f^{(n)}(x) = 0, \forall n \geq 5.$$

4.6. Dérivées successives

Formule de Leibniz

$$(f.g)^{(n)} = f^{(n)}.g + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} f^{(n-1)}.g^{(1)} + ... + \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} f^{(n-k)}.g^{(k)} + ... + f.g^{(n)}$$

autrement dit:

$$(f.g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} f^{(n-k)}.g^{(k)}.$$

Exemple

- Pour $n = 1, (f.g)^{(1)} = f'.g + f.g'$.

4.6. Dérivées successives

Formule de Leibniz

$$(f.g)^{(n)} = f^{(n)}.g + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} f^{(n-1)}.g^{(1)} + ... + \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} f^{(n-k)}.g^{(k)} + ... + f.g^{(n)}$$

autrement dit:

$$(f.g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} f^{(n-k)}.g^{(k)}.$$

Exemple

- Pour $n = 1, (f.g)^{(1)} = f'.g + f.g'.$
- Pour $n = 2, (f.g)^{(2)} = f''g + 2f'g' + fg''.$

4.7. Règle de l'hospital

Théorème

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables et soit $x_0 \in I$. On suppose que:

- $f(x_0) = g(x_0) = 0$.

Si

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$$

alors

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

4.7. Règle de l'hospital

Théorème

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables et soit $x_0 \in I$. On suppose que:

- $f(x_0) = g(x_0) = 0$.
- $\forall x \in I \backslash \{x_0\}, g'(x) \neq 0$.

Si

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$$

alors

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

4.7. Règle de l'hospital

Exemple

Calculer la limite $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln(x^2+x-1)}{\ln(x)}$

- $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln(x^2+x-1)}{\ln(x)} = \frac{0}{0}$

4.7. Règle de l'hospital

Exemple

Calculer la limite $\lim_{x \to 1} \frac{\ln(x^2+x-1)}{\ln(x)}$

- $\lim_{x \to 1} \frac{\ln(x^2+x-1)}{\ln(x)} = \frac{0}{0}$
- $f(x) = \ln(x^2 + x - 1), f(1) = 0, f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x-1}$

4.7. Règle de l'hospital

Exemple

Calculer la limite $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln(x^2+x-1)}{\ln(x)}$

- $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln(x^2+x-1)}{\ln(x)} = \frac{0}{0}$
- $f(x) = \ln(x^2 + x - 1), f(1) = 0, f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x-1}$
- $g(x) = \ln(x), g(1) = 0, g'(x) = \frac{1}{x}$

4.7. Règle de l'hospital

Exemple

Calculer la limite $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln(x^2+x-1)}{\ln(x)}$

- $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln(x^2+x-1)}{\ln(x)} = \frac{0}{0}$
- $f(x) = \ln(x^2 + x - 1), f(1) = 0, f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x-1}$
- $g(x) = \ln(x), g(1) = 0, g'(x) = \frac{1}{x}$
- Prenons $I =]0, 1]$, $x_0 = 1$, alors g' ne s'annule pas sur $I \backslash \{1\}$

4.7. Règle de l'hospital

Exemple

Calculer la limite $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln(x^2+x-1)}{\ln(x)}$

- $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln(x^2+x-1)}{\ln(x)} = \frac{0}{0}$
- $f(x) = \ln(x^2 + x - 1), f(1) = 0, f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x-1}$
- $g(x) = \ln(x), g(1) = 0, g'(x) = \frac{1}{x}$
- Prenons $I =]0, 1]\,, x_0 = 1$, alors g' ne s'annule pas sur $I \backslash \{1\}$
- $\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2x+1}{x^2+x-1} \times x = \frac{2x^2+x}{x^2+x-1} \underset{x \to 1}{\longrightarrow} 3$ alors $\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x \to 1}{\longrightarrow} 3.$

5.1. Fonction logarithme

Proposition

Il existe une unique fonction, notée $\ln :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ telle que:

$$\ln' x = \frac{1}{x}, \forall x \in 0, +\infty[, \ln(1) = 0.$$

De plus cette fonction vérifie (pour tout $a, b > 0$) :

- $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$,

5.1. Fonction logarithme

Proposition

Il existe une unique fonction, notée $\ln :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ telle que:

$$\ln' x = \frac{1}{x}, \forall x \in 0, +\infty[, \ln(1) = 0.$$

De plus cette fonction vérifie (pour tout $a, b > 0$) :

- $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$,
- $\ln(\frac{1}{a}) = -\ln a$,

5.1. Fonction logarithme

Proposition

Il existe une unique fonction, notée $\ln :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ telle que:

$$\ln' x = \frac{1}{x}, \forall x \in 0, +\infty[, \ln(1) = 0.$$

De plus cette fonction vérifie (pour tout $a, b > 0$) :

- $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b,$
- $\ln(\frac{1}{a}) = -\ln a,$
- $\ln(a^n) = n \ln a,$ pour tout $n \in \mathbb{N},$

5.1. Fonction logarithme

Proposition

Il existe une unique fonction, notée $\ln :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ telle que:

$$\ln' x = \frac{1}{x}, \forall x \in 0, +\infty[, \ln(1) = 0.$$

De plus cette fonction vérifie (pour tout $a, b > 0$) :

- $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$,
- $\ln(\frac{1}{a}) = -\ln a$,
- $\ln(a^n) = n \ln a$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
- $\ln$ est une fonction continue, strictement croissante et définit une bijection de $[0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$,

5.1. Fonction logarithme

Proposition

Il existe une unique fonction, notée $\ln :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ telle que:

$$\ln' x = \frac{1}{x}, \forall x \in 0, +\infty[, \ln(1) = 0.$$

De plus cette fonction vérifie (pour tout $a, b > 0$) :

- $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$,
- $\ln(\frac{1}{a}) = -\ln a$,
- $\ln(a^n) = n \ln a$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
- $\ln$ est une fonction continue, strictement croissante et définit une bijection de $[0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$,
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty, \lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty, \lim\limits_{x \to 0} x \ln x = 0, \lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1,$

5.1. Fonction logarithme

Proposition

Il existe une unique fonction, notée $\ln :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ telle que:

$$\ln' x = \frac{1}{x}, \forall x \in 0, +\infty[, \ln(1) = 0.$$

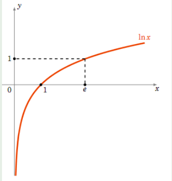
De plus cette fonction vérifie (pour tout $a, b > 0$) :

- $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$,
- $\ln(\frac{1}{a}) = -\ln a$,
- $\ln(a^n) = n \ln a$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
- $\ln$ est une fonction continue, strictement croissante et définit une bijection de $[0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$,
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = 0$, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$,
- La fonction ln est concave et $\ln x \leq x + 1$ (pour tout $x > 0$).

5.1. Fonction logarithme

Remarque

$\ln x$ s'appelle le logarithme naturel ou aussi logarithme néperien. Il est caractérisé par $\ln e = 1$. On définit le logarithme en base a par $\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$ de sorte que $\log_a(a) = 1$.
Pour $a = 10$ on obtient le logarithme décimal $\log_{10}$ qui vérifie $\log_{10}(10) = 1$ (et donc $\log_{10}(10^n) = n$). Dans la pratique on utilise

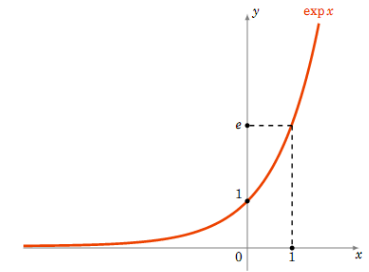


l'équivalence: $x = 10^y \iff y = \log_{10}(x)$.

5.2. Fonction exponentielle

Définition

La bijection réciproque de $\ln :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ s'appelle la fonction exponentielle, notée $\exp : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$.



5.2. Fonction exponentielle

Proposition

La fonction exponentielle vérifie les propriétés suivantes:

- $\exp(\ln x) = x$ pour tout $x > 0$ et $\ln(\exp x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$,

5.2. Fonction exponentielle

Proposition

La fonction exponentielle vérifie les propriétés suivantes:

- $\exp(\ln x) = x$ pour tout $x > 0$ et $\ln(\exp x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$,
- $\exp(a + b) = \exp a \times \exp b$,

5.2. Fonction exponentielle

Proposition

La fonction exponentielle vérifie les propriétés suivantes:

- $\exp(\ln x) = x$ pour tout $x > 0$ et $\ln(\exp x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$,
- $\exp(a + b) = \exp a \times \exp b$,
- $\exp(nx) = (\exp x)^n$,

5.2. Fonction exponentielle

Proposition

La fonction exponentielle vérifie les propriétés suivantes:

- $\exp(\ln x) = x$ pour tout $x > 0$ et $\ln(\exp x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$,
- $\exp(a+b) = \exp a \times \exp b$,
- $\exp(nx) = (\exp x)^n$,
- $\exp : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ est une fonction continue, strictement croissante,

5.2. Fonction exponentielle

Proposition

La fonction exponentielle vérifie les propriétés suivantes:

- $\exp(\ln x) = x$ pour tout $x > 0$ et $\ln(\exp x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$,
- $\exp(a+b) = \exp a \times \exp b$,
- $\exp(nx) = (\exp x)^n$,
- $\exp : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ est une fonction continue, strictement croissante,
- $\lim_{x\to-\infty} \exp x = 0$, $\lim_{x\to+\infty} \exp x = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{\exp x}{x} = +\infty$,

5.2. Fonction exponentielle

Proposition

La fonction exponentielle vérifie les propriétés suivantes:

- $\exp(\ln x) = x$ pour tout $x > 0$ et $\ln(\exp x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$,
- $\exp(a+b) = \exp a \times \exp b$,
- $\exp(nx) = (\exp x)^n$,
- $\exp : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ est une fonction continue, strictement croissante,
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp x = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\exp x}{x} = +\infty$,
- La fonction exponentielle est dérivable et $\exp' x = \exp x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Elle est convexe et $\exp x \geq 1 + x$.

5.3. La fonction puissance

Définition

On définit pour $a < 0$ et $b \in \mathbb{R}$

$$a^b = \exp(b \ln a).$$

Remarque

- $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}} = \exp(\frac{1}{2} \ln a)$ (la racine carrée de a),

5.3. La fonction puissance

Définition

On définit pour $a < 0$ et $b \in \mathbb{R}$

$$a^b = \exp(b \ln a).$$

Remarque

- $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}} = \exp(\frac{1}{2} \ln a)$ (la racine carrée de a),
- $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} = \exp(\frac{1}{n} \ln a)$ (la racine n^{ième} de a),

5.3. La fonction puissance

Définition

On définit pour $a < 0$ et $b \in \mathbb{R}$

$$a^b = \exp(b \ln a).$$

Remarque

- $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}} = \exp(\frac{1}{2} \ln a)$ (la racine carrée de a),
- $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} = \exp(\frac{1}{n} \ln a)$ (la racine n^{ième} de a),
- On note aussi $\exp x$ par e^x ce qui se justifie par le calcul $e^x = \exp(x \ln e) = \exp x$,

5.3. La fonction puissance

Définition

On définit pour $a < 0$ et $b \in \mathbb{R}$

$$a^b = \exp(b \ln a).$$

Remarque

- $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}} = \exp(\frac{1}{2} \ln a)$ (la racine carrée de a),
- $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} = \exp(\frac{1}{n} \ln a)$ (la racine n^{ième} de a),
- On note aussi $\exp x$ par e^x ce qui se justifie par le calcul $e^x = \exp(x \ln e) = \exp x$,
- Les fonctions $x \to a^x$ s'appellent aussi des fonctions exponentielles et se ramènent systématiquement à la fonction exponentielle classique par l'égalité $a^x = \exp(x \ln a)$. Il ne faut surtout pas les confondre avec les fonctions puissances $x \to x^a$.

S. Bénazth, et als. Biomathématiques, Analyse, Algebre, probabilités, statistiques. Masson, Paris, 2001.