Variables aléatoires

Dr. Meriem Bouhadjar

2020/2021

1. Variables aléatoires

Variables aléatoires

Exemple 1. On lance une pièce de monnaie 2 fois. Les résultats possibles sont $\{PP, PF, FP \; et \; FF\}$. On définit une variable X représentant le nombre de Piles P obtenues.
Alors les valeurs de X sont $\{0, 1 \; et \; 2\}$.

Exemple 2. On lance un dé jusqu'à l'obtention d'un 6. Les résultats possibles sont $\{6, (1,6), (2,6), ..., (5,6), (1,1,6), ..., (5,5,6)...\}$.
On définit une variable X représentant le nombre de lancers nécessaires jusqu'à l'obtention d'un 6. Alors les valeurs de X sont $\{1, 2, 3, ...\} = \mathbb{N}^*$.

Variables aléatoires

Exemple 1. On lance une pièce de monnaie 2 fois. Les résultats possibles sont $\{PP, PF, FP \; et \; FF\}$. On définit une variable X représentant le nombre de Piles P obtenues.
Alors les valeurs de X sont $\{0, 1 \; et \; 2\}$.
Exemple 2. On lance un dé jusqu'à l'obtention d'un 6. Les résultats possibles sont $\{6, (1,6), (2,6), ..., (5,6), (1,1,6), ..., (5,5,6)...\}$.
On définit une variable X représentant le nombre de lancers nécessaires jusqu'à l'obtention d'un 6. Alors les valeurs de X sont $\{1, 2, 3, ...\} = \mathbb{N}^*$.

Variables aléatoires

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé. On appelle variable aléatoire toute application

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\omega \longrightarrow X(\omega)$$

Variables aléatoires discrètes (v.a.d.)

Définition

La variable aléatoire X est dite discrète si elle prend un nombre fini ou infini dénombrable de valeurs.

Notation. Quand la v.a X prend la valeur x on écrit $\{X = x\}$ pour décrire l'événement $\{\omega \in \Omega, X(\omega) = x\}$.
Exemple. Dans l'exemple 1 $X = 0$ correspond au cas où on n'a pas de Piles P c'est à dire $\{X = 0\} = \{FF\}$.
De même $\{X = 1\} = \{PF, FP\}$, et $\{X = 2\} = \{PP\}$.

Variables aléatoires discrètes (v.a.d.)

Loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète

Définition

Soit X une v.a.d. On appelle loi de probabilité ou fonction de masse de la v.a. X l'application

$$p : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$$

$$x \longrightarrow p(x) = \mathbb{P}(X = x)$$

Propriété

1. $\forall x \in \mathbb{R}, p(x) \geq 0$
2. $\sum_{x\in\mathbb{R}} p(x) = 1.$

Variables aléatoires discrètes (v.a.d.)

Fonction de répartition

Définition

Soit X une v.a. (discrète ou continue). On appelle fonction de répartition de la v.a. X, la fonction F_X définie par

$$F_X : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$$

$$x \longrightarrow \mathbb{P}\left(X \leq x\right)$$

Variables aléatoires discrètes (v.a.d.)

Remarque

1. Si X est une v.a. est discrète alors

$$F_X(x) = \sum_{x_i \leq x} \mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{x_i \leq x} p(x_i)$$

2. La fonction de répartition permet de déterminer la loi de probabilité de la v.a. X. En effet, $\forall x_j \in X(\Omega)$

$$\mathbb{P}(X = x_j) = \sum_{i=1}^{j} \mathbb{P}(X \leq x_i) - \sum_{i=1}^{j-1} \mathbb{P}(X \leq x_i) = F_X(x_j) - F_X(x_{j-1})$$

Variables aléatoires discrètes (v.a.d.)

Propriété

1. $\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq F_X(x) \leq 1, (\lim_{x \longrightarrow -\infty} F_X(x) = 0; \lim_{x \longrightarrow +\infty} F_X(x) = 1)$;
2. Si $x \leq y$ alors $F_X(x) \leq F_X(y)$;
3. F_X est une fonction continue à droite $(\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{h \longrightarrow 0^+} F_X(x+h) = F_X(x))$;
4. Si $x < y$ alors $\mathbb{P}(x < X \leq y) = F_X(y) - F_X(x)$

Variables aléatoires discrètes (v.a.d.)

Propriété

1. $\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq F_X(x) \leq 1, (\lim_{x \longrightarrow -\infty} F_X(x) = 0; \lim_{x \longrightarrow +\infty} F_X(x) = 1)$;
2. Si $x \leq y$ alors $F_X(x) \leq F_X(y)$;
3. F_X est une fonction continue à droite $(\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{h \longrightarrow 0^+} F_X(x+h) = F_X(x))$;
4. Si $x < y$ alors $\mathbb{P}(x < X \leq y) = F_X(y) - F_X(x)$

Variables aléatoires discrètes (v.a.d.)

Propriété

1. $\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq F_X(x) \leq 1, (\lim_{x \longrightarrow -\infty} F_X(x) = 0; \lim_{x \longrightarrow +\infty} F_X(x) = 1)$;
2. Si $x \leq y$ alors $F_X(x) \leq F_X(y)$;
3. F_X est une fonction continue à droite $(\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{h \longrightarrow 0^+} F_X(x+h) = F_X(x))$;
4. Si $x < y$ alors $\mathbb{P}(x < X \leq y) = F_X(y) - F_X(x)$

Variables aléatoires discrètes (v.a.d.)

Propriété

1. $\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq F_X(x) \leq 1, (\lim_{x \longrightarrow -\infty} F_X(x) = 0; \lim_{x \longrightarrow +\infty} F_X(x) = 1)$;
2. Si $x \leq y$ alors $F_X(x) \leq F_X(y)$;
3. F_X est une fonction continue à droite $(\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{h \longrightarrow 0^+} F_X(x+h) = F_X(x))$;
4. Si $x < y$ alors $\mathbb{P}(x < X \leq y) = F_X(y) - F_X(x)$

Variables aléatoires discrètes (v.a.d.)

Exercice 1. Une urne contient 5 boules portant les numéros suivants : $1, 1, 2, 2$ et 3. On extrait simultanément et au hasard deux boules de cette urne. Soit X la variable aléatoire qui représente la somme des numéros des deux boules tirées.

1. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
2. Donner la fonction de répartition
3. Calculer $P(X < 3)$ et $P(2 \leq X \leq 3)$.
4. Calculer l'espérance mathématiques et la variance de la variable aléatoire X.

Variables aléatoires discrètes (v.a.d.)

1.
$\Omega =$
$\{\{1,1'\},\{1,2\},\{1,2'\},\{1,3\},\{1',2\},\{1',2'\},\{1',3\},\{2,2'\},\{2,3\},\{2',3\}\}$
$\Omega = C_5^2 = 10$
$X(\Omega) = \{1+1=2,3,4,5\}$
On va calculer $P(X=1), P(X=2), P(X=3), P(X=4)$ et $P(X=5)$
$(X=k) \overset{déf}{=} \{w \in \Omega / X(w) = k\}$ pour $k=2$
$(X=2) = \{\{1,1'\}\}$ d'ou $P(X=2) = \frac{1}{10}$

Variables aléatoires discrètes (v.a.d.)

$(X=3) \overset{déf}{=} \{w \in \Omega / X(w) = 3\}$ pour $k=3$
$(X=3) = \{\{1,2\},\{1,2'\},\{1',2\},\{1',2'\}\}$ d'ou $P(X=3) = \frac{4}{10}$
alors $P(X=4) = \frac{3}{10}$ et $P(X=5) = \frac{2}{10}$

k	2	3	4	5	$\sum$
$P(X=k)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	1

Variables aléatoires discrètes (v.a.d.)

2. $F(X) = \begin{cases} 0, x < 2 \\ \frac{1}{10}, 2 \leq x < 3 \\ \frac{1}{10} + \frac{4}{10} = \frac{5}{10}, 3 \leq x < 4 \\ \frac{1}{10} + \frac{4}{10} + \frac{3}{10} = \frac{8}{10}, 4 \leq x < 5 \\ \frac{1}{10} + \frac{4}{10} + \frac{3}{10} + \frac{2}{10} = 1, x \geq 5 \end{cases}$

Variables aléatoires discrètes (v.a.d.)

3. $P(X < 3) = P\left(X = 2\right) = \frac{1}{10}$
$P(2 \leq X \leq 3) = P\left(X = 2\right) + P\left(X = 3\right) = \frac{1}{10} + \frac{4}{10} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$
4. **L'espérence**
$E\left(X\right) = \sum_{i=1}^{4} k_i P\left(X = k_i\right) = 2.\frac{1}{10} + 3.\frac{4}{10} + 4.\frac{3}{10} + 5.\frac{2}{10} = \frac{36}{10}$
La variance
$Var\left(X\right) = E\left(X^2\right) - \left[E\left(X\right)\right]^2$
$E\left(X^2\right) = \sum_{i=1}^{4} k_i^2 P\left(X = k_i\right) = 2^2.\frac{1}{10} + 3^2.\frac{4}{10} + 4^2.\frac{3}{10} + 5^2.\frac{2}{10}$
$\left[E\left(X\right)\right]^2 = \left(\frac{36}{10}\right)^2$

Variables aléatoires continues (v.a.c.)

Définition

Une variable aléatoire réelle X est dite absolument continue si sa fonction de répartition $F_X(.)$ satisfait les deux conditions suivantes :

1. F_X est continue sur $\mathbb{R}$
2. F_X est dérivable en tout point $x \in \mathbb{R}$ sauf peut être sur un ensemble fini D.

Variables aléatoires continues (v.a.c.)

Définition

Une variable aléatoire réelle X est dite absolument continue si sa fonction de répartition $F_X(.)$ satisfait les deux conditions suivantes :

1. F_X est continue sur $\mathbb{R}$
2. F_X est dérivable en tout point $x \in \mathbb{R}$ sauf peut être sur un ensemble fini D.

Variables aléatoires continues (v.a.c.)

Théorème

Soit X une variable aléatoire absolument continue, de fonction de répartition F_X , alors pour tout couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, on a

1. $\mathbb{P}(X = a) = 0.$
2. $\mathbb{P}(X \in]a, b]) = \mathbb{P}(X \in]a, b[) = \mathbb{P}(X \in [a, b[) = \mathbb{P}(X \in [a, b]) = F_X(b) - F_X(a).$
3. $\mathbb{P}(X \in]a, \infty[) = \mathbb{P}(X \in [a, \infty[) = 1 - F_X(a).$
4. $\mathbb{P}(X \in]-\infty, b]) = \mathbb{P}(X \in]-\infty, b[) = F_X(b)$

Variables aléatoires continues (v.a.c.)

Théorème

Soit X une variable aléatoire absolument continue, de fonction de répartition F_X , alors pour tout couple $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, on a

1. $\mathbb{P}(X = a) = 0.$
2. $\mathbb{P}(X \in]a,b]) = \mathbb{P}(X \in]a,b[) = \mathbb{P}(X \in [a,b[) = \mathbb{P}(X \in [a,b]) = F_X(b) - F_X(a).$
3. $\mathbb{P}(X \in]a,\infty[) = \mathbb{P}(X \in [a,\infty[) = 1 - F_X(a).$
4. $\mathbb{P}(X \in]-\infty,b]) = \mathbb{P}(X \in]-\infty,b[) = F_X(b)$

Variables aléatoires continues (v.a.c.)

Théorème

Soit X une variable aléatoire absolument continue, de fonction de répartition F_X , alors pour tout couple $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, on a

1. $\mathbb{P}(X = a) = 0$.
2. $\mathbb{P}(X \in]a,b]) = \mathbb{P}(X \in]a,b[) = \mathbb{P}(X \in [a,b[) = \mathbb{P}(X \in [a,b]) = F_X(b) - F_X(a)$.
3. $\mathbb{P}(X \in]a,\infty[) = \mathbb{P}(X \in [a,\infty[) = 1 - F_X(a)$.
4. $\mathbb{P}(X \in]-\infty,b]) = \mathbb{P}(X \in]-\infty,b[) = F_X(b)$

Variables aléatoires continues (v.a.c.)

Théorème

Soit X une variable aléatoire absolument continue, de fonction de répartition F_X , alors pour tout couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, on a

1. $\mathbb{P}(X = a) = 0.$
2. $\mathbb{P}(X \in]a, b]) = \mathbb{P}(X \in]a, b[) = \mathbb{P}(X \in [a, b[) = \mathbb{P}(X \in [a, b]) = F_X(b) - F_X(a).$
3. $\mathbb{P}(X \in]a, \infty[) = \mathbb{P}(X \in [a, \infty[) = 1 - F_X(a).$
4. $\mathbb{P}(X \in]-\infty, b]) = \mathbb{P}(X \in]-\infty, b[) = F_X(b)$

Variables aléatoires continues (v.a.c.)

Définition

Une variable aléatoire réelle X définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ de fonction de répartition F_X est dite variable aléatoire absolument continue, s'il existe une fonction réelle f_X vérifiant les conditions suivantes :

1. $f_X(x) \geq 0; \forall x \in \mathbb{R}$
2. f_X est continue sur $\mathbb{R}$, sauf peut être sur un nombre fini de points où elle a une limite finie à gauche et limite finie à droite.
3. l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx$ existe et est égale à 1.
4. La fonction de répartition F_X peut s'écrire, pour tout $x \in \mathbb{R}$ sous la forme

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(s)\, ds$$

Variables aléatoires continues (v.a.c.)

Définition

Une variable aléatoire réelle X définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ de fonction de répartition F_X est dite variable aléatoire absolument continue, s'il existe une fonction réelle f_X vérifiant les conditions suivantes :

1. $f_X(x) \geq 0; \forall x \in \mathbb{R}$
2. f_X est continue sur $\mathbb{R}$, sauf peut être sur un nombre fini de points où elle a une limite finie à gauche et limite finie à droite.
3. l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx$ existe et est égale à 1.
4. La fonction de répartition F_X peut s'écrire, pour tout $x \in \mathbb{R}$ sous la forme

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(s)\, ds$$

Variables aléatoires continues (v.a.c.)

Définition

Une variable aléatoire réelle X définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ de fonction de répartition F_X est dite variable aléatoire absolument continue, s'il existe une fonction réelle f_X vérifiant les conditions suivantes :

1. $f_X(x) \geq 0; \forall x \in \mathbb{R}$
2. f_X est continue sur $\mathbb{R}$, sauf peut être sur un nombre fini de points où elle a une limite finie à gauche et limite finie à droite.
3. l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx$ existe et est égale à 1.
4. La fonction de répartition F_X peut s'écrire, pour tout $x \in \mathbb{R}$ sous la forme

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(s)\, ds$$

Variables aléatoires continues (v.a.c.)

Définition

Une variable aléatoire réelle X définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ de fonction de répartition F_X est dite variable aléatoire absolument continue, s'il existe une fonction réelle f_X vérifiant les conditions suivantes :

1. $f_X(x) \geq 0; \forall x \in \mathbb{R}$
2. f_X est continue sur $\mathbb{R}$, sauf peut être sur un nombre fini de points où elle a une limite finie à gauche et limite finie à droite.
3. l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx$ existe et est égale à 1.
4. La fonction de répartition F_X peut s'écrire, pour tout $x \in \mathbb{R}$ sous la forme

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(s)\, ds$$

Variables aléatoires continues (v.a.c.)

Théorème

Une fonction f qui satisfait les quatre conditions précédentes est dite fonction de densité de probabilité d'une variable aléatoire X absolument continue.

Espérance mathématique et variance

Définition

Soit X une variable aléatoire discrète ayant pour valeurs possibles x_1, x_2,... et pour fonction de masse $p(x)$. L'espérance mathématique de X est

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i \geq 1} x_i p(x_i) = \sum_{i \geq 1} x_i \mathbb{P}(X = x_i)$$

à condition que la série ci-dessus soit absolument convergente, sinon on dira que X n'admet pas d'espérance mathématique.

Remarque

Si X a un nombre fini de valeurs alors $\mathbb{E}[X]$ existe.

Espérance mathématique et variance

Définition

Soit X une variable aléatoire absolument continue ayant pour fonction de densité f , l'espérance mathématique de X est

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

à condition que l'intégrale soit absolument convergente, sinon on dira que X n'admet pas d'espérance mathématique.

Exemple

Soit T une variable aléatoire absolument continue dont la densité f est définie par

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{t^2} \ \text{Si} \ \ t > 1 \\ 0 \ ailleurs \end{cases}$$

Déterminer $\mathbb{E}[T]$.

Espérance mathématique et variance

Solution. On a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |tf(t)|\, dt = \int_{1}^{+\infty} \left|\frac{1}{t}\right| dt = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \int_{1}^{x} \left|\frac{1}{t}\right| dt = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \log x - \log 1 = +\infty$$

d'où l'espérance mathématique n'existe pas.

Définition

Soit G une fonction d'une variable aléatoire X, l'espérance mathématique de $G(X)$ est donnée par

$$\mathbb{E}[G(X)] = \begin{cases} \sum_{x\in\mathbb{R}} G(x)p(x) \ \ si\ X\ est\ discrète \\ \int_{-\infty}^{+\infty} G(x)f(x)dx\ si\ X\ est\ continue \end{cases}$$

à condition que la série et l'intégrale soient absolument convergentes.

Espérance mathématique et variance

Théorème

Soit X une variable aléatoire alors

1. $\mathbb{E}[c] = c$ où c est une constante
2. $\mathbb{E}[\alpha H(X) + \beta G(X)] = \alpha\mathbb{E}[H(X)] + \beta\mathbb{E}[G(X)]$ où H et G sont

des fonctions de X et α et β sont des réells. A condition que les différentes espérences existent.

Définition

Soit X une variable aléatoire, on appelle moment d'ordre $k (k \in \mathbb{N})$ la valeur suivante

$$\mathbb{E}[X^k] = \begin{cases} \sum_{x\in\mathbb{R}} X^k p(x) \;\; si \;\; X \;\; est \;\; discrète \\ \int_{-\infty}^{+\infty} X^k f(x) dx \;\; si \;\; X \;\; est \;\; continue \end{cases}$$

a condition que la série et l'intégrale soient absolument convergentes.

Espérance mathématique et variance

Théorème

Soit X une variable aléatoire alors

1. $\mathbb{E}[c] = c$ où c est une constante
2. $\mathbb{E}[\alpha H(X) + \beta G(X)] = \alpha \mathbb{E}[H(X)] + \beta \mathbb{E}[G(X)]$ où H et G sont

des fonctions de X et α et β sont des réells. A condition que les différentes espérences existent.

Définition

Soit X une variable aléatoire, on appelle moment d'ordre $k (k \in \mathbb{N})$ la valeur suivante

$$\mathbb{E}[X^k] = \begin{cases} \sum_{x \in \mathbb{R}} X^k p(x) \ \ si\ X\ est\ discrète \\ \int_{-\infty}^{+\infty} X^k f(x) dx\ si\ X\ est\ continue \end{cases}$$

a condition que la série et l'intégrale soient absolument convergentes.

Espérance mathématique et variance

Définition

Soit X une variable aléatoire, la variance de X, notée σ_X^2 ou $Var(X)$ est

$$\sigma_X^2 = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$$

On appelle écart type de X la quantité

$$\sigma_X = \sqrt{Var(X)}$$

Si $\mathbb{E}[X] = 0$ on dit que la variable aléatoire est centrée
Si $Var(X) = 1$ on dit que la variable aléatoire est réduite.

Espérance mathématique et variance

Théorème

Soit X une variable aléatoire ayant pour espérance mathématique $\mathbb{E}[X]$ et variance σ_X^2. Si $Y = aX + b$ où a et b sont des constantes, alors

$$\mathbb{E}[Y] = a\mathbb{E}[X] + b \text{ et } \sigma_Y^2 = a^2\sigma_X^2$$

Variables aléatoires continues (v.a.c.)

Exercice 2. Soit X une variable aléatoire continue et f une fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} kx(x-2) & pour \quad 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

1. Donner le réel k pour que f soit la densité de la variable aléatoire X.
2. Calculer la fonction de répartition de X.
3. Calculer l'espérance mathématique et la variance de la variable aléatoire X.

Variables aléatoires continues (v.a.c.)

Solution.

1. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx &= \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{2} f(x)\,dx + \int_{2}^{+\infty} f(x)\,dx \\ &= 0 + \int_{0}^{2} f(x)\,dx + 0 = \int_{0}^{2} f(x)\,dx \\ &= \int_{0}^{2} kx(x-2)\,dx = k\int_{0}^{2} x(x-2)\,dx \\ &= k\int_{0}^{2}\left(x^2-2x\right)dx = k\left[\frac{x^3}{3} - 2\frac{x^2}{2}\right]_0^2 \\ &= k\left[\frac{8}{3} - \frac{8}{2}\right] = -\frac{4}{3}k = 1 \Longrightarrow k = -\frac{3}{4}\end{aligned}$$

Variables aléatoires continues (v.a.c.)

2. $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} kt(t-2)\,dt$

-Si $x < 0 \Longrightarrow F(x) = 0$

-Si $x > 2 \Longrightarrow F(x) = 1$

-Si $0 \leq x \leq 2$ alors

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = -\frac{3}{4}\int_0^x t(t-2)\,dt = -\frac{3}{4}\int_0^x \left(t^2 - 2t\right)dt$$

$$= -\frac{3}{4}\left[\frac{t^3}{3} - t^2\right]_0^x = -\frac{3}{4}\left(\frac{x^3}{3} - x^2\right)$$

Variables aléatoires continues (v.a.c.)

3. $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx = \int_0^2 xkx(x-2)\,dx$
$= -\frac{3}{4}\int_0^2 x^2(x-2)\,dx = -\frac{3}{4}\int_0^2 \left(x^3 - 2x^2\right)dx$
$= -\frac{3}{4}\left[\frac{x^4}{4} - 2\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = -\frac{3}{4}\left[\frac{16}{4} - \frac{16}{3}\right] = 1$

Variables aléatoires continues (v.a.c.)

$$Var\left(X\right)=E\left(X^2\right)-\left[E\left(X\right)\right]^2$$
$$E\left(X^2\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f\left(x\right)dx=-\frac{3}{4}\int_0^2\left(x^4-2x^3\right)dx$$
$$=-\frac{3}{4}\left[\frac{x^5}{5}-2\frac{x^4}{4}\right]_0^2=\frac{6}{5}$$
$$Var\left(X\right)=\frac{6}{5}-1^2=\frac{1}{5}$$