Analyse Combinatoire

Dr. Meriem Bouhadjar

2020/2021

1. Analyse combinatoire

Analyse Combinatoire

Definition

C'est un ensemble de méthodes et de techniques qui consistent à choisir, énumérer des objets, à dénombrer les différentes manières de classement, de groupement des éléments dans un ou plusieurs ensembles. Cette partie des mathématiques est appelée également «dénombrement». Elle est largement utilisée en probabilité et en statistique en particulier dans le dénombrement des cas favorables et les cas possibles du rapport classique d'une probabilité, dans le binôme de Newton, le triangle de Pascal, la loi binomiale...

Notion de factorielle

C'est le nombre de manières de classer n éléments d'un ensemble. Ce nombre est noté $n!$ «lire n factoriel». Il est donné par le produit des entiers positifs de 1 à n, soit :

$$n! = n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,................(1)$$

Par convention $0! = 1$
Approximation de Stirling :

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^{n}\sqrt{2\pi n}$$

(à utiliser pour $n \geq 14$ à 10^{-3} près)

Notion de factorielle

Exemple 1. De combien de manières peut-on classer 4 livres dans une étagère ?

Solution. $4! = 4.3.2.1 = 24$

Donc il y a 24 manières de classer 4 livres dans une étagère.

Exemple 2. De combien de manières peut-on classer les 3 lettres ABC ?

Solution. $3! = 3.2.1 = 6$ manières.

Ces manières sont :

ABC, BAC, ACB, CBA, CAB, BCA.

Notion de factorielle

Exemple 1. De combien de manières peut-on classer 4 livres dans une étagère ?
Solution. $4! = 4.3.2.1 = 24$
Donc il y a 24 manières de classer 4 livres dans une étagère.
Exemple 2. De combien de manières peut-on classer les 3 lettres ABC ?
Solution. $3! = 3.2.1 = 6$ manières.
Ces manières sont :
ABC, BAC, ACB, CBA, CAB, BCA.

Notion de factorielle

Exemple 1. De combien de manières peut-on classer 4 livres dans une étagère ?

Solution. $4! = 4.3.2.1 = 24$

Donc il y a 24 manières de classer 4 livres dans une étagère.

Exemple 2. De combien de manières peut-on classer les 3 lettres ABC ?

Solution. $3! = 3.2.1 = 6$ manières.

Ces manières sont :

ABC, BAC, ACB, CBA, CAB, BCA.

Permutations

On distingue trois types de dénombrement : les permutations, les combinaisons et les arrangements.

Définition

Permutation de n objets discernables : toute disposition ordonnée des n objets. Deux permutation ne sont différentes que par l'odre des n objets tous distincts qui les composent.

Exemple 3. $E = \{a, b, c\}$, alors $(a, b, c), (a, c, b), (c, b, a)$ sont des permutations de E

Formule.

P_n nombre de permutations d'un ensemble de n éléments $P_n = n!$

Permutations

On distingue trois types de dénombrement : les permutations, les combinaisons et les arrangements.

Définition

Permutation de n objets discernables : toute disposition ordonnée des n objets. Deux permutation ne sont différentes que par l'odre des n objets tous distincts qui les composent.

Exemple 3. $E = \{a, b, c\}$, alors $(a, b, c), (a, c, b), (c, b, a)$ sont des permutations de E

Formule.

$$P_n \text{ nombre de permutations d'un ensemble de } n \text{ éléments } P_n = n!$$

Arrangements

Définition

Arrangement de p éléments pris parmi $n\,(p \leq n)$: toute disposition ordonnée sans répétition (sans remise, ou exhaustif) de p objets pris parmi n objets discernables.
Deux arrangements sont différents par la nature et l'ordre des éléments.

Exemple 4. $E = \{a, b, c\}$, alors $(a, b), (a, c), (b, a), (b, c), (c, a), (c, b)$ sont des arrangements de deux éléments de E.
Formule.

$$A_n^p \text{ nombre d'arrangement de } p \text{ éléments pris parmi : } A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Arrangements

Définition

Arrangement de p éléments pris parmi $n \, (p \leq n)$: toute disposition ordonnée sans répétition (sans remise, ou exhaustif) de p objets pris parmi n objets discernables.
Deux arrangements sont différents par la nature et l'ordre des éléments.

Exemple 4. $E = \{a, b, c\}$, alors $(a, b), (a, c), (b, a), (b, c), (c, a), (c, b)$ sont des arrangements de deux éléments de E.

Formule.

$$A_n^p \text{ nombre d'arrangement de } p \text{ éléments pris parmi : } A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Arrangements

Définition

Arrangement de p éléments pris parmi $n\,(p \leq n)$: toute disposition ordonnée sans répétition (sans remise, ou exhaustif) de p objets pris parmi n objets discernables.
Deux arrangements sont différents par la nature et l'ordre des éléments.

Exemple 4. $E = \{a, b, c\}$, alors $(a, b), (a, c), (b, a), (b, c), (c, a), (c, b)$ sont des arrangements de deux éléments de E.

Formule.

$$A_n^p \text{ nombre d'arrangement de } p \text{ éléments pris parmi : } A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Arrangements

Remarque. Si $p = n$ alors $A_n^n = \frac{n!}{0!} = n! = p_n$

Exemple 5. De combien de manières peut-on choisir un lot de 3 antibiotiques parmi 8 en prenant en considération l'ordre ?

Solution. Ce nombre est donné par

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} = A_8^3 = \frac{8!}{(8-3)!} = 336$$

Donc le nombre de manières de choisir 3 antibiotiques parmi 8, en considérant l'ordre, est égal à 336.

Arrangements

Remarque. Si $p = n$ alors $A_n^n = \frac{n!}{0!} = n! = p_n$
Exemple 5. De combien de manières peut-on choisir un lot de 3 antibiotiques parmi 8 en prenant en considération l'ordre ?
Solution. Ce nombre est donné par

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} = A_8^3 = \frac{8!}{(8-3)!} = 336$$

Donc le nombre de manières de choisir 3 antibiotiques parmi 8, en considérant l'ordre, est égal à 336.

Arrangements

Exemple 6. De combien de manières peut-on choisir 2 lettres parmi les 5 $ABCDE$ en prenant en considération l'ordre ?
Solution. Ce nombre est donné par

$$A_5^2 = \frac{5!}{(5-2)!} = 20$$

Donc le nombre de manières de choisir 2 lettres parmi les 5 $ABCDE$ est égal à 20.
Ces manières sont : AB AC AD AE BC BD BE CD CE DE BA CA DA EA CB DB EB DC EC ED

Arrangements

Exemple 6. De combien de manières peut-on choisir 2 lettres parmi les 5 $ABCDE$ en prenant en considération l'ordre ?
Solution. Ce nombre est donné par

$$A_5^2 = \frac{5!}{(5-2)!} = 20$$

Donc le nombre de manières de choisir 2 lettres parmi les 5 $ABCDE$ est égal à 20.
Ces manières sont : AB AC AD AE BC BD BE CD CE DE BA CA DA EA CB DB EB DC EC ED

Combinaisons

Définition

Combinaison de p éléments pris parmi $n\,(p \leq n)$: toute disposition non ordonnée de p objets pris parmi n objets discernables, chaque objet ne pouvant intervenir qu'une fois.
Deux combinaisons son différentes par la nature des éléments, quel que soit l'ordre des éléments.

Exemple 7. $E = \{a, b, c\}$ et $p = 2$, $\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$ sont des combinaisons de deux éléments de E.

Formule.

C_n^p nombre de combinaisons de p éléments pris parmi n : $C_n^p = \dfrac{n!}{p!\,(n-p)!}$

Combinaisons

Définition

Combinaison de p éléments pris parmi n $(p \leq n)$: toute disposition non ordonnée de p objets pris parmi n objets discernables, chaque objet ne pouvant intervenir qu'une fois.
Deux combinaisons son différentes par la nature des éléments, quel que soit l'ordre des éléments.

Exemple 7. $E = \{a, b, c\}$ et $p = 2, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$ sont des combinaisons de deux éléments de E.
Formule.

$$C_n^p \text{ nombre de combinaisons de } p \text{ éléments pris parmi } n : C_n^p = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

Combinaisons

Propriétés des C_n^p

- Avec n et p tels que $0 \leq p \leq n$

$$C_n^p = C_n^{n-p}$$

- Avec n et p tels que $1 \leq p \leq n$

$$C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$$

- Avec $n \geq 1$

$$C_n^0 = 1 \quad C_n^n = 1 \quad C_n^1 = n$$

Combinaisons

Exemple 8. De combien de manières peut-on choisir un lot de 3 antibiotiques parmi 8 ?

Solution. Ce nombre est donné par

$$C_8^3 = \frac{n!}{p!\,(n-p)!} = \frac{8!}{3!\,(8-3)!} = 56$$

Donc le nombre de manières de choisir 3 antibiotiques parmi 8 est égal à 56.

Combinaisons

Exemple 8. De combien de manières peut-on choisir un lot de 3 antibiotiques parmi 8 ?
Solution. Ce nombre est donné par

$$C_8^3 = \frac{n!}{p!\,(n-p)!} = \frac{8!}{3!\,(8-3)!} = 56$$

Donc le nombre de manières de choisir 3 antibiotiques parmi 8 est égal à 56.

Combinaisons

Exemple 9. De combien de manières peut-on choisir 2 lettres parmi les 5 *ABCDE* ?

Solution. Ce nombre est donné par

$$C_5^2 = \frac{5!}{2!\,(5-2)!} = 10$$

Donc le nombre de manières de choisir 2 lettres parmi les 5 *ABCDE* est égal à 10.

Ces manières sont : *AB AC AD AE BC BD BE CD CE DE*.

Combinaisons

Exemple 9. De combien de manières peut-on choisir 2 lettres parmi les 5 $ABCDE$?
Solution. Ce nombre est donné par

$$C_5^2 = \frac{5!}{2!\,(5-2)!} = 10$$

Donc le nombre de manières de choisir 2 lettres parmi les 5 $ABCDE$ est égal à 10.
Ces manières sont : AB AC AD AE BC BD BE CD CE DE.